Devoir surveillé n° 9 – Sujet A

mercredi 13 mai 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x+5y = z-t\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x+5y = z^2-t\}.$$

Si oui, en donner une base.

2) Les familles suivantes sont-elles libres ?

   a) $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,1)$, $w = (1,3,1)$, $x = (1,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

   b) $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,2,-1,1)$, $w = (2,-1,1,2)$, $x = (-6,-3,2,-6)$ dans $\mathbb{R}^4$.

3) Montrer que la famille de fonctions $\left(x \mapsto \sin^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4) On suppose que (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. La famille $(x_1-x_2, x_2+x_3, x_3-x_4, x_4+x_5, x_5-x_1)$ est-elle encore libre ?

5) Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (non supposé de dimension finie). Soient F_1, G_1, F_2 et G_2 des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = E_1$ et $F_2 \oplus G_2 = E_2$. Montrer que $E = (F_1+F_2) \oplus (G_1+G_2)$.

6) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \,|\, P(-1) = P(1) \text{ et } P'(-1) = P(0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_3[X]$ et en déterminer un supplémentaire.

7) Montrer que

$$u : aX^2+bX+c \longmapsto bX+c-2a$$

est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner ses éléments caractéristiques.

8)
   a) Montrer que $f : P \longmapsto P - X^2P''$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à $\mathbb{K}_n[X]$, au départ et à l'arrivée, est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

   c) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

9)
   a) Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$f(1) = \mathrm{I}_2, \quad f(4-X) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad f((X-2)(X+3)) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f((X-1)^3) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

   b) Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

   c) Expliciter la matrice $f(P)$ pour tout $P = aX^3+bX^2+cX+d$.

10) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(g|_{\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Ker}(g|_{\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

b) Montrer alors que
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

c) En déduire que
$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)),$$
avec égalité si et seulement si $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Expliciter u et u^2.

2) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_3)$ en fonction de λ.

b) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ si et seulement si $\lambda \in \{-1; 0; 1\}$.

c) Est-ce que u est un automorphisme ?

d) Déterminer trois vecteurs e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{R}^3$ non nuls tels que
$$e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}), \qquad e_2 \in \mathrm{Ker}(u) \qquad \text{et} \qquad e_3 \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$
On s'arrangera pour que ces trois vecteurs aient tous les trois une seconde coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) égale à 1.

e) Expliciter D la matrice de u dans la base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{E}$. Donner, sans démonstration, une expression de A en fonction de D et P.

3) a) Justifier, sans calculer A^3 directement, que $A^3 = A$.

b) En déduire une expression de A^n puis de u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On distinguera les cas où n est pair ou impair.

4) a) Déterminer une équation du plan $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,0,1))$ puis en déduire que $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$ en est un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la projection p sur F parallèlement à G.

c) En déduire la symétrie s de rapport F parallèlement à G.

Exercice 3 : Quelques résultats sur les endomorphismes nilpotents

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit u un endomorphisme nilpotent de E, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. On suppose aussi que u est non nul.

1) a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ puis montrer que la famille $\mathscr{F}_p = (u^{p-1}(x_0), u^{p-2}(x_0), \cdots, u(x_0), x_0)$ est libre.

c) En déduire que $p \leqslant n$.

d) Supposons que $n = p$. Exprimer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}_p}(u)$ dans le cas où $n = p$.

2) Dans cette question uniquement, supposons que $n = 3$ et $p = 2$ (c'est-à-dire $u \neq 0$ et $u^2 = 0$).

a) Comparer $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$.

b) Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $\mathscr{B}_0 = (u(x_0), x_0, y_0)$ soit une base de E. Expliciter ensuite la matrice de u dans cette base.