Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 9 – Sujet B

mercredi 13 mai 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

*Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Apéritif

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

2) En déduire que
$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)),$$
avec égalité si et seulement si $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Problème : Endomorphismes échangeurs

Préambule

Dans ce problème, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Quelques définitions et notations :

- On dit qu'un endomorphisme u de E est **échangeur** s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E vérifiant :
$$F \oplus G = E, \qquad u(F) \subset G \qquad \text{et} \qquad u(G) \subset F.$$
Le cas échéant, on dit que u échange F et G.
- On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable** par u si $u(F) \subset F$. Le cas échéant, on notera simplement u_F l'endomorphisme induit par u sur F (c'est-à-dire restreint à F au départ comme à l'arrivée).
- Lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une **valeur propre** de u si $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$, c'est-à-dire s'il existe $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel x est alors appelé **vecteur propre** de u associé à λ.
- Lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $u^0 = \mathrm{Id}_E$, $u^1 = u$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$, $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.
Si $d \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme de degré d, on note $P(u)$ l'endomorphisme
$$\sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_d u^d.$$
Autrement dit, pour tout $x \in E$,
$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = a_0 x + a_1 u(x) + a_2 u^2(x) + \cdots + a_d u^d(x).$$

Si P est le polynôme nul, alors on convient que $P(u)$ désigne l'endomorphisme nul de E. Si P et Q sont des polynômes, alors on pourra utiliser les propriétés suivants sans les redémontrer :

- ⋆ pour tous réels λ et μ, $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$.
- ⋆ $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$.

Enfin, si P est un polynôme tel que $P(u)$ est l'endomorphisme nul, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

- On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que u^k est l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est d'étudier des propriétés des endomorphismes échangeurs. Il s'organise ainsi :

- La partie A présente différents exemples (un exemple en dimension 3, en exemple en dimension infinie) et traite le cas où $\dim(E) = 2$.
- La partie B consiste à établir plusieurs résultats généraux sur les endomorphismes échangeurs dont quelques conditions nécessaires :
  - ⋆ Si u est échangeur, alors u est somme de deux endomorphismes de carré nul. Notons **(C)** cette condition.
  - ⋆ Si u est échangeur, alors u et $-u$ sont conjugués : il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\varphi^{-1} \circ u \circ \varphi = -u$.
  - ⋆ Si u est échangeur et E de dimension finie, alors u est de trace nulle.
  - ⋆ Si u est échangeur et E de dimension finie alors, pour toute valeur propre λ de u, $-\lambda$ est encore valeur propre de E.
- Dans la partie C, on montre que la réciproque de la condition **(C)** est vraie lorsque u est un automorphisme et E est de dimension finie.
- La partie D est consacrée à un résultat intermédiaire utile dans la partie E.
- La partie E consiste à montrer que, en dimension finie, tout endomorphisme nilpotent est échangeur.
- Dans la partie F, on utilise la partie E pour montrer la réciproque de la condition **(C)** dans le cas général (en dimension finie).
- Dans le partie G, on montre enfin que, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\dim(E) = 3$, u est échangeur si et seulement s'il est non bijectif et de trace nulle.

Les parties A, B, C, D et G sont globalement indépendantes même si certaines questions évoquent des résultats précédemment montrés. Plusieurs questions de la partie E utilisent les parties B et D. La partie F est une partie bilan qui utilise les précédentes.

Partie A : Premiers exemples

1) Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Expliciter u.

   b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer $\mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_3)$ en fonction de λ.

   c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ si et seulement si $\lambda \in \{-1; 0; 1\}$.

   d) Déterminer trois vecteurs e_1, e_2, e_3 de $\mathbb{K}^3$ non nuls tels que

$$e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}), \qquad e_2 \in \mathrm{Ker}(u) \qquad \text{et} \qquad e_3 \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

   On s'arrangera pour que ces trois vecteurs aient tous les trois une seconde coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$) égale à 1.

   e) Sans faire de calculs, en déduire que A et $-A$ sont semblables.
   On pensera à faire apparaître une matrice de passage vers la base (e_1, e_2, e_3) et une autre vers la base (e_3, e_2, e_1).

f) Déterminer une équation du plan $F = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3, e_2)$ puis en déduire que $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3)$ en est un supplémentaire.

g) Montrer que u est échangeur et expliciter la matrice de u dans la base $\mathscr{E} = (e_1 - e_3, e_2, e_1 + e_3)$.

2) Dans cette question, on suppose que E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de E. On considère un endomorphisme u de E qui est non nul de trace nulle.

a) Justifier qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

On note $\Delta = -a^2 - bc$ le déterminant de cette matrice.

b) On pose $\mathscr{E} = (v_1, v_2)$ avec

$$(v_1, v_2) = \begin{cases} (\varepsilon_1, a\varepsilon_1 + c\varepsilon_2) & \text{si} \quad c \neq 0 \\ (\varepsilon_2, b\varepsilon_1 - a\varepsilon_2) & \text{si} \quad c = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2, a\varepsilon_1 + a\varepsilon_2) & \text{si} \quad c = b = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs v_1 et v_2 sont alors non colinéaires et donc $\mathscr{E}$ est une base de E (on ne demande pas de le montrer). Calculer la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$ en fonction de Δ.

Il est attendu que la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$ soit la même dans les trois cas considérés.

c) Conclure que u est échangeur.

On précisera des sous-espaces F et G supplémentaires qui sont échangés par u.

On verra dans la prochaine partie que l'endomorphisme nul est échangeur et qu'un endomorphisme échangeur est de trace nulle. Cela montre qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2 est échangeur si et seulement s'il est de trace nulle.

3) Montrer que

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' + XP \end{cases}$$

est un endomorphisme échangeur de $\mathbb{K}[X]$.

Partie B : Premiers résultats sur les endomorphismes échangeurs

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.

1) Montrer que l'endomorphisme nul est échangeur.

2) Soit u un endomorphisme échangeur de E. Notons F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E qui sont échangés par u.

a) Notons p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F. On pose $a = p \circ u$ et $b = q \circ u$. Vérifier que $u = a + b$ et $a^2 = b^2 = 0$.

b) Notons s la symétrie de rapport F parallèlement à G. Simplifier $(s^{-1} \circ u \circ s)|_F$ et $(s^{-1} \circ u \circ s)|_G$. En déduire que $s^{-1} \circ u \circ s = -u$.

3) Supposons, de plus, que E soit de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

a) Déduire de la question précédente que, si u est échangeur, alors $\mathrm{tr}(u) = 0$.

b) En déduire que, si $\dim(E) = 1$, seul l'endomorphisme nul est échangeur.

c) Supposons que u soit échangeur et reprenons la notation s de la question B2b. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \forall x \in E, \qquad x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad s^{-1}(x) \in \mathrm{Ker}(u + \lambda \, \mathrm{Id}_E).$$

d) Supposons que u soit échangeur et qu'il possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ (définition donnée dans le préambule). Déduire de la question précédente que $-\lambda$ est encore valeur propre de u et que

$$\dim(\mathrm{Ker}(u + \lambda \, \mathrm{Id}_E)) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E)).$$

e) Supposons que $\dim(E) = 4$. Donner un exemple d'un automorphisme de E qui soit de trace nulle mais non échangeur.

On construira un endomorphisme représenté par une matrice diagonale.

4) Supposons que E soit de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ n'étant pas l'endomorphisme nul.

   a) Montrer que u est échangeur si et seulement si il existe une base $\mathscr{E}$ de E, un entier $p \in [\![1\,;n-1]\!]$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{p,p} & B \\ \hline A & 0_{n-p,n-p} \end{array}\right)$$

   On précisera des espaces supplémentaires qui sont échangés par u dans le sens indirect.

   b) Monter que si u est un automorphisme échangeur, alors E est de dimension paire.

5) On ne suppose plus que E soit de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soient F_1, G_1, F_2 et G_2 des sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = E_1$ et $F_2 \oplus G_2 = E_2$.

   a) Montrer que $E = (F_1 + F_2) \oplus (G_1 + G_2)$.

   b) Soit u un endomorphisme de E qui laisse stables E_1 et E_2. Notons alors u_1 l'endomorphisme de E_1 induit par u sur E_1 et u_2 l'endomorphisme de E_2 induit par u sur E_2. Supposons que :

   - u_1 est un endomorphisme échangeur de E_1 qui échange F_1 et G_1.
   - u_2 est un endomorphisme échangeur de E_2 qui échange F_2 et G_2.

   Montrer que u est échangeur.

Partie C : Réciproque de (C) dans le cas des automorphismes

Dans la partie B, on a montré que tout endomorphisme échangeur s'écrit comme somme de deux endomorphismes de carré nul. L'objectif de cette partie est de montrer la réciproque dans le cas où E est de dimension finie.

On suppose donc que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne a et b deux endomorphismes de E tels que $a^2 = b^2 = 0$. On suppose que $u = a + b$ est un automorphisme.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b)$ sont en somme directe.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Im}(f)$ à $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire que

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant \frac{n}{2}.$$

3) Démontrer alors que $E = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Ker}(b)$ puis que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(b)$.

4) En déduire que u est échangeur.

Partie D : Un principe de décomposition

Dans cette partie, nous montrons un résultat intermédiaire sur les endomorphismes en dimension finie qui nous permettra de montrer l'implication indirecte dans le cas général (pas seulement pour les automorphismes).

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$K_p = \mathrm{Ker}(u^p) \qquad \text{et} \qquad I_p = \mathrm{Im}(u^p).$$

1) Montrer que les suites $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

2) Justifier l'existence de $q = \min\{p \in \mathbb{N} \mid K_p = K_{p+1}\}$.
   On s'intéressera à la monotonie de la suite $(\dim(K_p))_{p\in\mathbb{N}}$.

3) a) Montrer que, pour tout $p \geqslant q$, $K_p = K_{p+1}$.

   b) En déduire que, pour tout $p \geqslant q$, $I_p = I_{p+1}$.

4) Montrer que $E = I_q \oplus K_q$.

5) a) Vérifier que I_q et K_q sont stables par u.

b) Montrer enfin que u_{I_q} est un automorphisme de I_q et que u_{K_q} est un endomorphisme nilpotent de K_q.

Ce dernier résultat pousse à s'intéresser aux endomorphismes nilpotents qui sont échangeurs.

Partie E : Tout endomorphisme nilpotent est échangeur

On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 3$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent non nul.

1) a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ puis montrer que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

c) En déduire que $p \leqslant n$. Que dire sur la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ dans le cas où $p = n$?

d) Montrer que, si $p = n$, alors u est un endomorphisme échangeur.
On pourra considérer $F = \mathrm{Vect}(u^i(x_0))_{i \in I}$ et $G = \mathrm{Vect}(u^i(x_0))_{i \in J}$ avec I et J formant une partition bien choisie de $[\![0\,; p-1]\!]$.

2) Dans cette question uniquement, supposons que $n = 3$ et $p = 2$ (c'est-à-dire $u \neq 0$ et $u^2 = 0$). Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathrm{Ker}(u)$ tel que $\mathscr{B}_0 = (x_0, y_0, u(x_0))$ soit une base de E. Expliciter ensuite la matrice de u dans cette base et conclure que u est échangeur.
On pensera à utiliser la question C2 puis la question B4a.

Les deux questions précédentes entraînent que, si $\dim(E) = 3$, alors tout endomorphisme nilpotent est échangeur.

On revient maintenant au cas où n est quelconque (supérieur à 3) et on suppose dans la suite que $p \in [\![2\,; n-1]\!]$. On note

$$A = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)).$$

3) a) Donner la dimension de A, justifier que A est stable par u et montrer que u_A est nilpotent d'indice de nilpotence p.

b) Justifier qu'il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E tels que la famille

$$\mathscr{B}_0 = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0), e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

est une base de E.

On note λ^* la forme linéaire coordonnée selon $u^{p-1}(x_0)$ relativement à cette base[1]. On définit de plus l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & \big(\lambda^*(x), \lambda^*(u(x)), \lambda^*(u^2(x)), \ldots, \lambda^*(u^{p-1}(x))\big) \end{array} \right.$$

et on admet qu'elle est linéaire. On pose $B = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

c) Montrer que B est stable par u et que u_B est nilpotent sur B.

d) Calculer $\Phi(u^k(x_0))$ pour tout $k \in [\![0\,; p-1]\!]$ et prouver que $\dim(B) = n - p$.

e) Conclure que $A \oplus B = E$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, tout endomorphisme nilpotent de E est échangeur ». À l'aide de la question précédente, ainsi que de la question B5, montrer par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Cela signifie que, pour tout $x \in E$, $\lambda^*(x)$ est la coordonnée de x selon le vecteur $u^{p-1}(x_0)$ dans la base $\mathscr{B}_0$. Autrement dit, pour tout $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x_0) + \sum_{k=p+1}^{n} \beta_k e_k \in E$, $\lambda^*(x) = \alpha_{p-1}$.

Partie F : Réciproque de (C) dans le cas général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Maintenant que l'on sait que tout endomorphisme nilpotent de E est échangeur, il est temps de revenir à la réciproque de **(C)**. On suppose que a et b sont deux endomorphismes de E tels que $a^2 = b^2 = 0$. On pose $u = a+b$. On a vu dans la partie D qu'il existait $q \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ tel que $E = \mathrm{Im}(u^q) \oplus \mathrm{Ker}(u^q)$, $u_{\mathrm{Im}(u^q)}$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}(u^q)$ et $u_{\mathrm{Ker}(u^q)}$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{Ker}(u^q)$.

1) a) Montrer que u^2 commute avec a puis que $\mathrm{Im}(u^{2q})$ est stable par a.

   Comme a et b jouent des rôles symétriques, $\mathrm{Im}(u^{2q})$ est également stable par b (on ne demande pas de détailler ce point).

   b) En utilisant la question C4, montrer que $u_{\mathrm{Im}(u^q)}$ est échangeur.

   c) En utilisant la question B5, conclure que u est échangeur.

Partie G : CNS dans le cas où E est $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3

Soit E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a vu dans la partie B que, si u est échangeur, alors u n'est pas bijectif et u est de trace nulle. On sait aussi que, si u est nilpotent, alors u est échangeur. Supposons donc que u soit de trace nulle, non bijectif et non nilpotent.

1) a) Que dire de la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant 9}$? En déduire que u possède un polynôme annulateur non nul.

   b) Montrer qu'il existe un polynôme annulateur unitaire de u et de degré minimal [1].

   c) Soit P un polynôme annulateur unitaire de u de degré minimal. En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer que tout polynôme annulateur de u est un multiple de P. En déduire que P est unique. On l'appelle alors le polynôme minimal de u et on le note P_u.

2) a) Montrer que P_u admet une racine non nulle.
   On rappelle que u est supposé non nilpotent et aussi que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans cette partie.

   b) Soit α une racine de P_u. Notons $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_u = (X-\alpha)Q$. Justifier que $Q(u)$ n'est pas l'endomorphisme nul et en déduire qu'il existe y_0 non nul tel que $(u - \alpha\,\mathrm{Id}_E)(y_0) = 0$.

   c) Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathrm{Ker}(u)$ non nul puis qu'il existe $z_0 \in E$ tel que (x_0, y_0, z_0) soit une base de E. En déduire qu'il existe $(\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(z_0) = \beta x_0 + \gamma y_0 - \alpha z_0$.

3) On pose enfin

$$v_0 = 2\beta x_0 + (1+\gamma)y_0 - 2\alpha z_0 \qquad \text{et} \qquad w_0 = -2\beta x_0 + (1-\gamma)y_0 + 2\alpha z_0.$$

   Vérifier que (v_0, x_0, w_0) est une base de E, écrire la matrice de u dans cette base et conclure que u est échangeur.

Nous en déduisons que, dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, un endomorphisme est échangeur si et seulement s'il est non bijectif et de trace nulle.

1. Cela signifie qu'il y a un polynôme annulateur de u qui est unitaire (donc non nul) et que tout autre polynôme annulateur non nul de u est de degré supérieur ou égal à celui-ci.