

Applications linéaires

Dans toute cette feuille d'exercice, E , F et G désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels, avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I Ces applications sont-elles linéaires ?

Exercice 1. (★) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ?

- | | |
|---|---|
| 1) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto (xy, y, z)$ | 6) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$
$(x, y, z) \mapsto (0, x + z, z - y, 0, 0, x + 2z)$ |
| 2) $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z, t) \mapsto 2025(x - y + z - t)$ | 7) $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$
$(x, y, z, t, u) \mapsto (1, x + y, z + t, t + u)$ |
| 3) $\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
$P \mapsto P(X + 1) - 2P'(X)$ | 8) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a + b \\ -b & a - b & 0 \end{pmatrix}$ |
| 4) $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$
$A \mapsto A^T$ | 9) $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
$f \mapsto \int_0^1 t f(t) dt$ |
| 5) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$A \mapsto A^2 - 3A + 2I_n$ | |

Exercice 2. (★) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- 1) $f \mapsto f' - 2f'' + 3f$, 2) $f \mapsto \exp \circ f$ 3) $f \mapsto (\sin \times f)'$ 4) $f \mapsto (x \mapsto x f''(2025))$

II Étude d'applications linéaires explicites

Exercice 3. (★) Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (y - 2z, 2x + y - 4z, x + y - 3z)$.

- Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
- Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Pouvait-on le prévoir à l'aide d'un résultat du cours ?

Exercice 4. (★) Notons $F = \{(x + y + 4z, 2x + 4z, 3x + 2y + 10z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

- Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F = \text{Im}(f)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
On que F est définie sous forme paramétrée.
- Montrer que $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où e_1 et e_2 sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 .
- Écrire F sous la forme $\text{Ker}(g)$ avec $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On dit alors que $g(x) = 0$ est une équation de F .
- Montrer que $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de \mathbb{R}^3 .
- L'endomorphisme f est-il surjectif ? Injectif ? Bijectif ?

Exercice 5. (★) On considère dans cet exercice \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que $u : z \in \mathbb{C} \mapsto z + i\bar{z}$ est un endomorphisme de \mathbb{C} et donner une base de $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exercice 6. (★) Montrer que $f : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un endomorphisme. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Est-ce que f est un automorphisme ?

Exercice 7. (★) Montrer que $g : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP$ est un endomorphisme. Déterminer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$. Est-ce que g est un automorphisme ?

Exercice 8. (★) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Déterminer son noyau. Est-il injectif ?

Exercice 9. (★) Montrer que $f \mapsto (x \mapsto f' + xf(x))$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer son image et son noyau. Est-il injectif? Surjectif?

Exercice 10. (★★) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace et on note $\text{tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M .

- 1) a) Montrer que tr définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b) Calculer $\text{tr}(I_n)$.
- c) Est-ce que tr est injective? Surjective? Bijective?

On introduit l'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - \text{tr}(M)I_n$.

- 2) Montrer que f est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 3) Vérifier que $X^2 + (n-2)X - n + 1$ est un polynôme annulateur de f .
- 4) En déduire que f est un automorphisme et expliciter sa bijection réciproque.

Exercice 11. (★★) On considère l'application T définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $T(P) = 3XP + X^2P' - X^3P''$.

- 1) Montrer que T est linéaire.
- 2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré de P' en fonction de celui de P .
- 3) Donner le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P .
- 4) T est-elle injective? surjective?

Exercice 12. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Montrer que $d : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P'$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{K}_n[X]$. Préciser son indice de nilpotence.
- 2) Déterminer le noyau et l'image de d .
- 3) Montrer que $\text{Id}_E - d$ est un automorphisme de E et déterminer l'antécédent de $\frac{X^n}{n!}$ par $\text{Id}_E - d$.

Exercice 13. (★★) On considère les applications

$$D : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \quad \text{et} \quad P : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(t)dt \end{cases}$$

- 1) Montrer que D et P sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 2) Expliciter $D \circ P$ et $P \circ D$.
- 3) Déterminer $\text{Ker}(D)$, $\text{Ker}(P)$, $\text{Ker}(D \circ P)$ et $\text{Ker}(P \circ D)$.
- 4) a) Montrer que $\text{Im}(P) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
- b) Déterminer $\text{Im}(D)$, $\text{Im}(D \circ P)$ et $\text{Im}(P \circ D)$.
- 5) D et P sont-elles injectives? Surjectives? Bijectives?

Exercice 14. (★★★) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on définit l'application

$$T(f) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

puis l'application $T : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

$$f \longmapsto T(f)$$

- 1) Montrer que $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
- 2) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
- 3) Montrer que T est injective.
- 4) Soit $g \in \text{Im}(T)$. Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et que $xg'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Est-ce que T est surjective?
- 5) Déterminer $\text{Im}(T)$.

III Propriétés d'applications linéaires

Exercice 15 – Un énorme classique. (★★) Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda x.$$

Montrer que f est une homothétie, c'est-à-dire

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$

On commencera par se donner deux vecteurs x et y de E et on fera deux cas selon que (x, y) est libre ou liée. Dans le cas où ils sont libres, on s'intéressera à $x + y$.

Exercice 16. (★) Soient E' et F' des \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F' . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E', F') \\ f &\longmapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Exercice 17. (★) Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

Exercice 18. (★) Soient f et g deux endomorphismes de E . Montrer que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(g \circ f))$.

Exercice 19. (★) Soient E, F et G des espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{Ker}(f|_{\text{Im}(u)}) = \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(u)$ et $\text{Im}(f|_{\text{Im}(u)}) = \text{Im}(f \circ u)$.

Exercice 20. (★★) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \\ \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- 2) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
- 3) Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ si et seulement si $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = E$
- 4) Conclure.

Exercice 21. (★★) Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que f est soit nulle soit surjective.

Exercice 22. (★) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -u$. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Exercice 23. (★★★) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}_E$.

- 1) Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.
- 2) Montrer que

$$\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f^2 + f + \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$$

Exercice 24 – Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe. (★★★) Soient $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et (x_1, \dots, x_n) des vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrer que (x_1, \dots, x_n) est une famille libre.

IV Détermination d'applications linéaires

Exercice 25. (★)

1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0), \quad \text{et} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

2) Est-elle surjective ? injective ? bijection ?

3) Exprimer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

4) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

Exercice 26. (★) Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 - e_3, \quad \text{et} \quad f(e_3 + e_2) = 2(e_1 - e_2 + \alpha e_3).$$

Déterminer α afin que f soit injective.

Exercice 27. (★★) Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E .

1) Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = 2e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_3, \quad f(e_3) = 0, \quad f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + 2e_2.$$

2) Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que

$$f(e_2 + e_3) = e_2, \quad f(e_1 + e_2) = e_3, \quad f(e_1 - e_3) = e_1.$$

Exercice 28. (★) On se place dans $E = \mathbb{K}^3$. Soient $E_1 = \text{Vect}(1, 0, 0)$ et $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 1, 1))$. Montrer qu'il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E_1, \quad u(x) = 2x \quad \text{et} \quad \forall x \in E_2, \quad u(x) = -x$$

Déterminer cette application linéaire.

Exercice 29. (★★) Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E , $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad f(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \quad f(e_i) \neq 0$$

1) Donner une inclusion entre $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\text{Ker}(f)$. Montrer qu'en général il n'y a pas égalité.

2) Montrer que si $n = p + 1$ alors il y a égalité.

V Projections et symétries

Exercice 30. (★) Reprendre intégralement l'exercice 32 de la feuille d'exercices n°28 et expliciter à chaque question :

- la projection sur F_1 parallèlement à F_2 et le contraire.
- la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 et le contraire.

Exercice 31. (★)

1) Montrer que $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + z, y + z, 0)$ est un projecteur de \mathbb{R}^3 dont on précisera les éléments caractéristiques.

2) Montrer que $s : (x, y, z) \mapsto (x, -z, -y)$ est une symétrie de \mathbb{R}^3 dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 32. (★★) Montrer que $s : P \mapsto \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) - P$ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 33. (★★) Montrer que $s : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques et s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

Exercice 34. (★) Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^3 telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y)$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
- 2) a) Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de f .
b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1} .
- 3) Donner une base de $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $E_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- 4) Posons $p = f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$.
a) Exprimer f en fonction de p et q .
b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.
c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.
- 5) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 35. (★) Soient p et q deux projecteurs de E distincts et non nuls. Montrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 36. (★★) Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tel que $p \circ q = q \circ p$.

- 1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E .
- 2) Montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ et que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$

Exercice 37. (★★) Soient p et q deux projecteurs de E .

- 1) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
 - $p + q$ est un projecteur.
 - $p \circ q = -q \circ p$.
 - $p \circ q = q \circ p = 0$ (on pourra composer par p).

On pourra composer par p la dernière condition.

- 2) Montrer que dans ce cas on a $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Exercice 38. (★★) Soit p un projecteur de E . On définit

$$C(p) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid p \circ u = u \circ p\}$$

- 1) Montrer que $C(p)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ (on dit que c'est une sous-algèbre). Donner un élément de $C(p)$ distinct de l'application nulle.
- 2) Montrer que $u \in C(p)$ si et seulement si u laisse stables le noyau et l'image de p .

Exercice 39 – Introduction au lemme des noyaux. (★★) Soient a et b deux scalaire distincts et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - a\text{Id}_E) \circ (u - b\text{Id}_E) = 0$.

- 1) Simplifier $(u - a\text{Id}_E) - (u - b\text{Id}_E)$.
- 2) Montrer que $E = \text{Ker}(u - a\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - b\text{Id}_E)$.
- 3) Déterminer une expression simple de la projection p sur $\text{Ker}(u - a\text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u - b\text{Id}_E)$.
- 4) Vérifier que $u = ap + b(\text{Id}_E - p)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u^n .