Feuille d'exercices n° 12

Arithmétique des entiers

I Divisibilité

Exercice 1. (★) Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise n^2+1.

Exercice 2. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. Simplifier $(n+1)\binom{2n+1}{n+1}$ et en déduire que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 3. (★) Soit n un entier naturel se terminant par 5. Notons p le nombre formé par les chiffres de n à l'exception du chiffre des unités. Montrer que n^2 est l'entier naturel terminant par 25 et dont les chiffres précédents sont $p(p+1)$.

Exercice 4. (★) Pour quelles valeurs de $a \in [\![0\,;9]\!]$ le nombre d'écriture décimale $123a4$ est-il divisible par 12 ?

Exercice 5. (★) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors n est la puissance 6-ième d'un entier.

Exercice 6. (★) Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Exercice 7. (★★) Soient a et b deux entiers naturels.

1) Montrer que si a^2 divise b^2 alors a divise b.
2) Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est un carré, alors a et b sont des carrés. Le résultat est-il encore vrai si a et b ne sont pas supposés premiers entre eux ?
3) Généraliser au cas d'une puissance $k^{\text{ième}}$ avec $k \geqslant 2$. En déduire que le produit de trois entiers consécutifs non nuls n'est jamais une puissance $k^{\text{ième}}$.

Exercice 8. (★★) Notons $\theta = \frac{2\pi}{7}$. En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\theta)$ est irrationnel.

Exercice 9. (★★) Soit p premier et soit $k \in [\![1\,;p-1]\!]$. Montrer que p divise $\binom{p-1}{k} - (-1)^k$.

Exercice 10 – Unicité de l'écriture en base b. (★★) Soit $b \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Soient $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $r_0, \dots, r_k, s_0, \dots, s_\ell$ des entiers naturels strictement inférieurs à b tels que

$$\sum_{i=0}^{k} r_i b^i = \sum_{i=0}^{\ell} s_i b^i.$$

Montrer que $k = \ell$ et que, pour tout $i \in [\![0\,;k]\!]$, $r_i = s_i$.

II Congruences

Exercice 11. (★) Quel est le chiffre des unités de 1789^{1789} ? de 1515^{1515} ? de 2022^{2022} ? de $2027^{2025^{2026}}$?

Exercice 12. (★) Donner les deux derniers chiffres de $S = \sum_{k=0}^{2025} k!$.

Exercice 13. (★) Montrer que 7 divise $3^{105} + 4^{105}$.

Exercice 14. (★) Montrer que, pour tout n impair, $n(n^2-1)$ est divisible par 24.

Exercice 15. (★) Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$. Montrer que : $3 \mid a^2+b^2 \iff 3\mid a$ et $3\mid b$.

Exercice 16. (★) Résoudre l'équation $3x\equiv 4[7]$ d'inconnue $x\in\mathbb{Z}$.

Exercice 17. (★) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

1) $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2) $2^{6n+3}+3^{4n+2}$ est divisible par 17.
3) $2^{4^n}+5$ est divisible par 21.
4) $n^{2025}(n^{2024}-1)$ est divisible par 8.

Exercice 18. (★) Soit $n\in\mathbb{Z}$. Montrer que $n^7\equiv n[42]$.

Exercice 19. (★) Soient $n\geqslant 1$ et $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a\equiv b[n]$, alors $a^n\equiv b^n[n^2]$.

Exercice 20. (★) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$. Montrer que si 7 divise $a^3+b^3+c^3$ alors 7 divise abc.

Exercice 21. (★) Soit x un nombre à (au plus) deux chiffres. Montrer que le nombre à (au plus) six chiffres obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Exercice 22. (★) Montrer qu'il n'existe aucun $n\in\mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ soient entiers.

Exercice 23. (★★) Montrer que, parmi les 101 dalmatiens, on peut en choisir 11 tels que le nombre total de leurs taches est un multiple de 11.

Exercice 24. (★★) Soit $(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $k\geqslant 1$ tel que $a^k\equiv 1[b]$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe un multiple de 2027 qui ne s'écrit qu'avec des 1. Et pour 2025 ? 2026 ?

Exercice 25. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe n puissances de 10 distinctes ayant la même congruence modulo n. En déduire qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1 et des 0 en écriture décimale.

Exercice 26. (★★) Soient $a_1,\dots,a_n$ des entiers (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe $a_{k+1},\dots,a_l$ entiers consécutifs (éventuellement un seul) dont la somme est un multiple de n.

Exercice 27. (★★) On se donne 2025 entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances $37^{\text{ièmes}}$ est divisible par 399.

Exercice 28 – Nombres de Fermat. (★★★)

1) Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, si 2^a+1 est premier, alors a est une puissance de 2.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on appelle $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat le nombre $F_n=2^{2^n}+1$.

2) Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

On admet que $F_4=65537$ est un nombre premier.

3) a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n-2=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}F_k$.
   b) En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.
4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, expliciter les deux derniers chiffres de F_n selon la valeur de n.
5) Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit p un facteur premier de F_n.
   a) Montrer que l'ensemble $E=\{k\in\mathbb{N}^*\,|\,2^k\equiv 1[p]\}$ admet un plus petit élément noté d.
   b) Montrer que tout élément de E est divisible par d.
   c) En déduire que $d=2^{n+1}$.
   d) Montrer que $p\equiv 1\left[2^{n+1}\right]$. Pourquoi était-il naturel pour Euler d'essayer 641 lorsqu'il cherchait les diviseurs de F_5 ?
   e) Montrer que, en effet, $641|F_5$.

A ce jour, on sait que, pour tout $n\in[\![5\,;32]\!]$, F_n n'est pas premier. On sait que d'autres ne le sont pas non plus, comme F_{73}. Mais on ne sait pas s'il existe d'autres nombres premiers parmi les F_n, $n\geqslant 33$.

Exercice 29. (★★★) Donner la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

III Équations diophantiennes

Exercice 30. (★) Résoudre l'équation $29x - 11y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 31. (★) En raisonnant modulo 8, montrer que l'équation diophantienne $x^2 - 2y^2 = 3$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, n'a pas de solution.

Exercice 32. (★★) Résoudre l'équation $5x - 3y + 8z = 1$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

Exercice 33. (★★) Montrer, en raisonnant modulo 3, que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, n'a que $(0, 0, 0)$ pour solution.

IV PPCM et PGCD

Exercice 34. (★) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 35. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le PGCD de $n! + 1$ et de $(n+1)! + 1$.

Exercice 36. (★) Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $28 \vee n = 140$.

Exercice 37. (★) Donner $9100 \wedge 1848$.

Exercice 38. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $n^3 + 2n \wedge n^4 + 3n^2 + 1$.

Exercice 39. (★★) Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 40. (★)

1) Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 4373 et 826 par n donnent pour restes 8 et 9.
2) Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 6381 et 3954 par n donnent pour restes 9 et 6.

Exercice 41. (★★) Soient M et m deux entiers naturels non nuls. Donner une CNS sur M et m pour qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $ab = M$ et $a \vee b = m$.

Exercice 42. (★) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à 2, $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$.

Exercice 43 – Éléments générateurs de $\mathbb{U}_n$. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.

1) Montrer que $\{\omega^p \mid p \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
2) En déduire que $\{\omega^p \mid p \in [\![0\,;n-1]\!]\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

V Valuation p-adique

Exercice 44. (★) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 5544. Et de 36000000000.

Exercice 45. (★★) Quel est le plus petit entier admettant exactement 15 diviseurs ?

Exercice 46. (★) Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Exprimer la décomposition en produit de facteurs premiers du plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que b divise an ?

Exercice 47. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_2\left(5^{2^n} - 1\right) = n + 2$.

Exercice 48 – Formule de Legendre. (★★★) Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $p \in \mathbb{P}$.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathrm{card}(\{i \in [\![1\,;n]\!] \,|\, v_p(i) = k\})$.
2) Montrer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Cette somme n'est pas infinie en fait puisque $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ *dès que* k *est tel que* $p^k > n$.

3) Par combien de zéros l'entier $2025!$ s'achève-t-il ?

VI Nombres premiers

Exercice 49. (★) Les nombres $1, 11, 111, 1111$ et 111111 sont-ils premiers ?

Exercice 50 – Nombres premiers jumeaux. (★★)

1) Soit $p \geqslant 5$ (pas forcément premier). Montrer que parmi p, $p+2$ et $p+4$, il y a au moins un multiple de 3.

Il en découle que p, $p+2$ et $p+4$ ne peuvent pas être tous les trois premiers. Cependant, il n'y a aucune raison pour que p et $p+2$ (ou $p+2$ et $p+4$) ne soient pas premiers tous les deux : deux nombres premiers p et q tels que $|p-q| = 2$ sont dits jumeaux. C'est le cas par exemple de 3 et 5, de 5 et 7, de 11 et 13, de 17 et 19 etc.

2) Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'ils sont jumeaux si et seulement si $pq+1$ est un carré.
3) Montrer que, si p et q sont premiers jumeaux et supérieurs ou égaux à 5, alors $p+q$ est divisible par 12.

Exercice 51 – Produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. (★★★)

1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\dbinom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.
2) Soit p un nombre premier vérifiant $m+1 < p \leqslant 2m+1$. Montrer que p divise $\dbinom{2m+1}{m}$. En déduire que

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$$

où le produit ne porte que sur les nombres premiers.

3) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n$.

Exercice 52 – Théorème de Wilson. (★★★)

1) Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier.
   a) Montrer que pour tout $x \in [\![1\,;p-1]\!]$, il existe un unique élément de $[\![1\,;p-1]\!]$ que l'on notera $f(x)$ tel que $x \times f(x) \equiv 1[p]$. Expliciter $f(f(x))$.
   b) Soit $x \in [\![1\,;p-1]\!]$. Donner le cardinal de $\{x; f(x)\}$.
   c) Soit $(x,y) \in [\![1\,;p-1]\!]^2$. Montrer que les ensembles $\{x; f(x)\}$ et $\{y; f(y)\}$ sont soit disjoints soit égaux.
   d) Montrer finalement que $(p-1)! \equiv -1[p]$.
2) Soit $n \geqslant 5$ composé. Montrer que $(n-1)! \equiv 0[n]$.
3) Nous avons donc montré le théorème de Wilson : un entier $p \geqslant 5$ est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$. Ce critère de primalité présente-t-il un intérêt pratique ?
4) Si $n \geqslant 2$, on note $g(n)$ le plus petit nombre strictement positif congru à $2 + 2n!$ modulo $n+1$. Montrer que $\{g(n) \,|\, n \geqslant 2\} = \mathbb{P}$.