Feuille d'exercices n° 23

Calcul Matriciel

Exercice 1. (★) Calculer $A+B$, $A-2B$, AB et BA (si c'est possible) lorsque

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2 & 1\\ -1 & -5 & 0 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}8 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$,

2) $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 8\\ 1 & 5 & -4\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -7 & -2 & 0\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$,

3) $A=\begin{pmatrix}i & 2+3i\\ 1+i & -4i\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 7i\\ 4-5i & -i\end{pmatrix}$,

4) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 0\\ 3 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix}$,

5) $A=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{17}{5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{11} & 1\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{4}\\ 2 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Exercice 2. (★) Calculer la transposée des matrices $A=\begin{pmatrix}\pi & 1 & 2 & -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 0 & 3\end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix}2 & i & 1 & -i\\ 0 & -3 & 0 & 6\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 2 & 12 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix},\qquad \text{et}\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 3 & -4\\ 5 & -6 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (★) On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices A et B définies par :

$$\forall (i,j)\in [\![1\,;n]\!]^2,\qquad A_{i,j}=i+j\qquad \text{et}\qquad B_{i,j}=i-j$$

Calculer le terme général des matrices $C=A-B$ et $D=AB$.

Exercice 4. (★) Soit $(A,B)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Exercice 5. (★) Notons A la matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en ligne et colonne n qui valent 1. Calculer A^2.

Exercice 6. (★) Soient A,B,C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles telles que $ABC=0$. Montrer que deux au moins sont non inversibles.

Exercice 7. (★) Soient n et p des entiers naturels. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $AA^\top=\mathrm{O}_n$. En regardant les coefficients diagonaux du produit, montrer que $A=\mathrm{O}_{n,p}$. Est-ce encore valable si $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$?

Exercice 8. (★★) Soit A telle que $A\times A^\top\times A=I_n$. Montrer que $A^3=I_n$.

Exercice 9. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Existe-t-il $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB-BA=\mathrm{I}_n$?
On pourra utiliser la trace.

Exercice 10. (★) Notons

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ -6 & 7 & -3\\ -6 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2-5A. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2) Calculer $(B+\mathrm{I}_3)(B-2\mathrm{I}_3)(B-5\mathrm{I}_3)$. En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

Exercice 11. ($\bigstar$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A^{2025} + \sum_{k=0}^{2024} \lambda_k A^k = 0$$

où $(\lambda_0, \dots, \lambda_{2024})$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. On suppose que $\lambda_0 \neq 0$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 12. ($\bigstar$) Considérons $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. En considérant $B = A - 3\mathrm{I}_3$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. ($\bigstar$) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer M_α^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. ($\bigstar$) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel x_n tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 15. ($\bigstar$) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels x_n et y_n tels que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.
   b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression en fonction de x_n et y_n en fonction de n.
3) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$ et retrouver le résultat.

Exercice 16. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, notons $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que,

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad (A_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i \in [\![1\,;k]\!] \text{ et } j = i+n-k) \text{ ou } (i \in [\![k+1\,;n]\!] \text{ et } j = i-k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, écrire la matrice A_k sous forme de tableau (avec des pointillés).
2) Montrer rigoureusement que, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $A_k = A_1^k$.
3) On montrerait de même que $A_1^n = \mathrm{I}_n$. En déduire que, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, A_k est inversible et préciser son inverse.

Exercice 17. ($\bigstar$) On suppose $n \geqslant 2$ et on pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Calculer J^2. En déduire que J est inversible et donner son inverse.

Exercice 18. ($\bigstar$) Considérons à nouveau la matrice A de l'exercice 15. Est-ce que A est inversible ? Si oui, exprimer son inverse en fonction de A et I_3. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 19. (★) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. (★★) Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible.

Exercice 21. (★★) Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. On pose $\Omega = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{\Omega}$ la matrice dont tous les coefficients sont les conjugués de ceux de Ω.

1) Calculer $\Omega \times \overline{\Omega}$.
2) En déduire que Ω est inversible et calculer son inverse.

Exercice 22. (★) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$$

On introduit aussi les matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23. (★★) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2) Déterminer U, V et W non nuls dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ tels que $AU = U$, $AV = -V$ et $AW = 3W$.
3) Considérons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont définies par les matrices colonnes U, V et W (dans cet ordre). Montrer que $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ puis calculer P^{-1} et $D = P^{-1}AP$.
4) Exprimer X_n en fonction de X_0, P^{-1}, P et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24. (★★) Considérons $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M.
2) Est-ce que M est inversible ?
3) Calculer M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 25 – Matrice d'un projecteur. (★★) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $P^2 = P$, où

$$P = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{g \in G} g.$$

On utilisera le fait qu'une application injective d'un ensemble fini dans lui-même est bijective.

Exercice 26 – Une autre construction de $\mathbb{C}$. (★) On pose $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1) Montrer que C est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Montrer que C est un corps.
3) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & C \\ a+ib & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un isomorphisme de corps. On aurait donc pu construire $\mathbb{C}$ de cette manière ! Vérifier qu'il existe bien une matrice $J \in C$ telle que $J^2 = -I_2$.

Exercice 27. (★★) On pose $\mathcal{A} = \{a\mathrm{J}_n + b\mathrm{I}_n \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ $(n \geqslant 2)$ où $\mathrm{J}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer de deux façons différentes que J_n n'est pas inversible.
2) Montrer que, pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$, si $a\mathrm{J}_n + b\mathrm{I}_n = c\mathrm{J}_n + dI_n$, alors $a = c$ et $b = d$.
3) Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $M^n = \mathrm{I}_n$.
4) (★★★) Soit $M = a\mathrm{J}_n + b\mathrm{I}_n \in \mathcal{A}$. Montrer que M admet un inverse dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $b(b+na) \neq 0$ et donner alors l'inverse de M.

Exercice 28 – Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (★★★)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle commutant de A l'ensemble $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Soit $(k,l) \in [\![1\,;n]\!]^2$. A quelle condition une matrice M est-elle dans $C(E_{k,l})$?
3) Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $Z(\mathcal{M}_n(K))$, est l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres. Montrer que

$$Z(\mathcal{M}_n(K)) = \bigcap_{1 \leqslant i,j \leqslant n} C(E_{i,j})$$

puis préciser cette intersection.
4) Donner l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

Exercice 29. (★★★)

1) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que A et A^{-1} soient toutes les deux à coefficients positifs ou nuls. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de A comporte un et un seul coefficient non nul.
2) Montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est à coefficients positifs ou nuls et si chaque ligne et chaque colonne de A comporte un et un seul coefficient non nul, alors A^{-1} est aussi à coefficients positifs ou nuls.

Exercice 30 – Matrices de permutation, cas général. (★★★) On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1\,;n]\!]$ c'est-à-dire des bijections de $[\![1\,;n]\!]$ dans lui-même. Pour tout $\sigma \in S_n$, on pose $M_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(i)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Soit $\sigma \in S_n$. Décrire plus précisément M_σ.
2) Montrer que $G = \{M_\sigma \,|\, \sigma \in S_n\}$, l'ensemble des matrices de permutation, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ isomorphe à S_n.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $\sigma \in S_n$. Calculer $A \times M_\sigma$ et $M_\sigma \times A$.
4) Expliquer pourquoi cet exercice généralise le résultat du cours concernant les matrices de permutation.

Exercice 31 – Décomposition LU (Lower-Upper). (★★★★) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On suppose que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, la sous-matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ est inversible.

1) À l'aide du pivot de Gauss, montrer qu'il existe L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U triangulaire supérieure inversible telle que $A = LU$.
2) Prouver que cette décomposition est unique.