**Feuille d'exercices n° 30**

# Dénombrement

## I Dénombrements en vrac

**Exercice 1.** (★) À l'issue d'un concours, $160$ candidats sont admis dont $70$ garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des $10$ premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

**Exercice 2.** (★) Combien y a-t-il de mots utilisant l'alphabet latin (ayant un sens ou non) composés

1) de cinq lettres ?
2) de cinq lettres distinctes ?
3) de cinq lettres avec un $y$ ?
4) de cinq lettres formant un palindrome ?
5) de cinq lettres distinctes et dans l'ordre alphabétique ?
6) de cinq lettres avec exactement 2 voyelles ?

**Exercice 3.** (★) On dispose d'une urne avec $4$ boules bleues, $6$ boules rouges et $7$ boules jaunes. On suppose que les boules sont numérotées (de telle sorte que l'on puisse les distinguer). On tire $5$ boules dans l'urne.

1) Quel est le nombre de tirages simultanés donnant $2$ bleues, $2$ rouges et $1$ jaune ?
2) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant $2$ bleues, $2$ rouges et $1$ jaune dans cet ordre ?
3) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant $2$ bleues, $2$ rouges et $1$ jaune ?
4) (★★) Reprendre ces trois questions dans le cas où les boules sont indiscernables et ajouter le cas où les tirages se font avec remise.

**Exercice 4.** (★★) Dans un jeu de carte, toute carte possède une couleur (♣, ♠, ♢ ou ♡) et un rang (un numéro ou une figure). On tire cinq cartes d'un jeu de $4r$ cartes avec $r \in \mathbb{N}^*$ (si $r = 13$, il s'agit d'un jeu de $52$ cartes et, si $r = 8$, il s'agit d'un jeu de $32$ cartes[1]). On obtient ce qu'on appelle une main.

1) (★) Combien y a-t-il de mains possibles ?
2) (★) Combien y a-t-il de mains avec
   a) uniquement des figures ?
   b) exactement un trèfle ?
   c) au moins un valet ?
   d) deux piques, un cœur et deux carreaux ?
   e) au moins une dame et un 9 ?
   f) (★★) exactement deux rois ou exactement deux cœurs ?
3) (★★) Combien y a-t-il de mains possibles avec (dans l'ordre de leurs forces au poker fermé) :
   a) une *quinte flush* (cinq cartes de la même couleur et de rangs consécutifs) ?
      *On introduira $s_r$ le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s_{13} = 10$ et $s_8 = 4$.*
   b) un *carré* (quatre cartes de même rang et une cinquième carte quelconque) ?
   c) un *full* (trois cartes de même rang et deux autres cartes de même rang) ?
   d) une *couleur* (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs) ?
   e) une *quinte* (cinq cartes de rangs consécutifs et qui ne sont pas toutes de la même couleur) ?
   f) un *brelan* (trois cartes de même rang et deux cartes de rangs distincts deux à deux et différents de celui des trois premières cartes) ?
   g) une *double paire* (deux cartes de même rang, deux autres cartes de même rang mais différent de celui des deux premières cartes et une cinquième carte de rang différent des deux précédents) ?
   h) une *paire* (deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différent de celui la paire) ?
   i) une *carte haute* (cinq cartes n'étant pas toutes de la même couleur, de rangs distincts deux à deux et non consécutifs) ?

**Exercice 5.** (★★) Une étagère comporte 15 DVD distincts dont 6 films de science fiction, 7 thrillers et 2 biopics. Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ? Qu'en est-il si on impose un rangement par genre ? Et si on souhaite seulement que les thrillers soient groupés ?

1. Pour obtenir un jeu de $32$ cartes à partir d'un jeu de $52$ cartes, on enlève toutes les cartes numérotées $2$, $3$, $4$, $5$ ou $6$.

**Exercice 6.** (★★) Une urne contient $15$ boules numérotées de $1$ à $15$. Les boules $1$ à $5$ sont blanches et les boules $6$ à $15$ sont noires. On tire successivement $5$ boules de l'urne sans remise.

1) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages contenant deux boules blanches et trois boules noires ?

**Exercice 7.** (★) Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) de chacun de ses mots : MAISON, POSSIBLE, ANAGRAMME, LEDZEPPELIN, MISSISSIPPI ?

**Exercice 8.** (★★) Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$. Dénombrer

1) le nombre de façons de placer $p$ pièces identiques dans $n$ poches différentes.
   *Indice : on pourra coder cette situation par une succession de $o$ et de $|$ comme en cours.*
2) le nombre de façons de placer $p$ pièces identiques dans $n$ poches différentes de sorte qu'aucune ne soit vide.
3) le nombre de tirages successifs et avec remise de $p$ boules dans une urne contenant $n$ boules numérotées de $1$ à $n$, sans prendre en compte l'ordre.
4) le nombre de $n$-uplets $(r_1, \dots, r_n)$ d'éléments de $[\![0\,;p]\!]$ tels que $r_1 + \cdots + r_n = p$.
5) (★★★) le nombre d'applications croissantes de $E$ dans $F$ lorsque $E$ et $F$ sont des parties finies de $\mathbb{R}$ ayant respectivement $p$ et $n$ éléments.

## II Formule du crible

**Exercice 9 – Formule de Poincaré pour trois ensembles.** (★★)

1) Soient $A$, $B$ et $C$ trois parties d'un ensemble $E$ fini. Montrer que $A \cup B \cup C$ est fini et que
$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B \cap C) - \mathrm{card}(A \cap B)\\ - \mathrm{card}(A \cap C) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$
   *L'exercice suivant généralise cette formule à une union finie quelconque.*
2) Quelques applications de cette formule.
   a) Dans un ciné-club, 45 membres ont vu au moins un des trois films de Hitchcock *Vertigo*, *Psycho* et *Rear Window*. On sait que 33 d'entre eux ont vu *Vertigo*, 30 ont vu *Psycho* et 19 ont vu *Rear Window*. On sait aussi que 22 ont vu à la fois *Vertigo* et *Psycho*, 13 ont vu à la fois *Psycho* et *Rear Window*, 8 ont vu à la fois *Vertigo* et *Rear Window*. Combien de membres ont vu les trois films ?
   b) Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à $2025$ et qui ne sont divisibles ni par $3$, ni par $5$, ni par $7$ ?

**Exercice 10 – Formule du crible.** (★★★) Montrer que si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors :
$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{card}\left(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}\right).$$

**Exercice 11 – Nombre de dérangements.** (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$. On appelle dérangement de $E$ toute permutation (c'est-à-dire toute bijection de $E$ sur lui-même) sans point fixe. Notons $D_n$ le nombre de dérangements de $E$. Montrer que
$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$
en utilisant la formule du crible (cf. exercice précédent). Calculer ensuite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{D_n}{n!}$ et interpréter [1].

1. On pourra faire le lien avec le jeu du « Noël Canadien »

## III Dénombrements plus abstraits

**Exercice 12.** (★★) Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments.

1) Dénombrer les lois de composition internes sur $E$.
2) Dénombrer les lois de composition internes commutatives sur $E$.
3) Dénombrer les lois de composition internes commutatives sur $E$ admettant un élément neutre.

**Exercice 13.** (★★) Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. Montrer que $\displaystyle\sum_{X \subset E} \mathrm{card}(X) = n2^{n-1}$.

**Exercice 14.** (★★★) Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. Combien y a-t-il de couples $(A, B)$ de parties de $E$ dont l'intersection soit un singleton ?

**Exercice 15.** (★★) Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments.

1) Combien y a-t-il de partitions de $E$ en deux ensembles (non vides) ?
2) Même question avec trois ensembles (non vides).

**Exercice 16.** (★★) Soit $G$ un groupe fini et soient $A$ et $B$ deux parties de $G$. Notons $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. On suppose que $\mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) > \mathrm{card}(G)$.

1) Montrer que, pour tout $g \in G$, $A \cap \{gb^{-1} \mid b \in B\}$ est non vide.
2) Montrer que $G = AB$.

**Exercice 17.** (★★★) Soient $G$ un groupe fini, $H$ un groupe (pas forcément fini) et $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(\mathrm{Ker}(f)) \times \mathrm{card}(\mathrm{Im}(f))$.

## IV Utilisation du principe des tiroirs

**Exercice 18.** (★) Combien un village doit-il compter d'habitants pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

**Exercice 19.** (★★) Parmi $51$ entiers distincts compris entre $1$ et $100$, montrer qu'il en existe toujours au moins deux consécutifs.

**Exercice 20.** (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $n$ puissances de $10$ distinctes ayant la même congruence modulo $n$. En déduire qu'il existe un multiple de $n$ qui ne s'écrit qu'avec des $1$ et des $0$ en écriture décimale.

**Exercice 21.** (★★) Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe $a_{k+1}, \dots, a_l$ entiers consécutifs (éventuellement un seul) dont la somme est un multiple de $n$.

**Exercice 22.** (★★) Montrer que, tous les matins, il existe deux élèves qui serrent le même nombre de mains (tous les élèves ne se disent pas bonjour et tous ne se serrent pas la main non plus).

**Exercice 23.** (★★★) Soit $E$ un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative notée multiplicativement. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x^2 = x$.

## V Dénombrement via relation de récurrence

**Exercice 24 – Nombres de Bell.** (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal $n$ (l'ordre des ensembles formant la partition n'ayant pas d'importance) avec la convention que $B_0 = 1$.

1) Calculer $B_1$, $B_2$ et $B_3$.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

*On pourra, dans un ensemble $E$ de cardinal $n+1$, se donner un élément $a$ de $E$ et séparer les cas, selon le cardinal de la partie de $E$ dans la partition qui contient $a$.*

**Exercice 25 – Nombre de parenthésages admissibles.** (★★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n$ la nombre de façons d'écrire $n$ parenthèses gauches et $n$ parenthèses droites de sorte que le mot obtenu soit bien parenthésé (on parle de parenthésage admissible). On prend la convention selon laquelle, lorsqu'il n'y a pas de parenthèse, il n'y a qu'une façon de les ordonner, en ne faisant rien : $C_0 = 1$. Par exemple, lorsque $n = 3$, les $5$ possibilités sont

$$((())), \qquad (()()), \qquad (())(), \qquad ()(()) \qquad \text{et} \qquad ()()().$$

Les nombres $C_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont appelés les nombres de Catalan.

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construire une bijection entre les parenthésages admissibles avec $2n$ parenthèses et les chemins de Bernoulli allant de $(0,0)$ à $(2n,0)$ sans descendre sous l'axe des abscisses (cf. paragraphe III.3.c du cours).

   *Compte tenu du paragraphe III.3.c du cours, on a donc* $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

**Exercice 26 – Nombre de surjections.** (★★★) Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ non nuls, notons $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à $n$ éléments dans un ensemble à $p$ éléments.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $S(n,p)$ lorsque $p > n$
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Calculer $S(n,n), S(n,1)$, $S(n,2)$, $S(n+1,n)$.
3) Montrer que pour tous $n \geqslant 3$ et $p \in [\![2\,;n-1]\!]$,
$$S(n,p) = p \times \big(S(n-1,p-1) + S(n-1,p)\big).$$
4) En déduire que, $S(n+2,n) = \dfrac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$.

# VI Double comptage

**Exercice 27.** (★★) Montrer par double comptage que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall p \in [\![0\,;n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

**Exercice 28 – Nombre de dérangements – remake.** (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'exercice 11, on a défini la notion de dérangement d'une permutation d'un ensemble $E$ à $n$ éléments et noté $D_n$ le nombre de dérangement. On convient que $D_0 = 1$. En utilisant un double comptage puis la formule[1] d'inversion de Pascal (vue dans l'exercice 41 du chapitre n° 7), retrouver le fait que
$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!.$$

**Exercice 29 – Nombre de surjections – remake.** (★★) Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ non nuls, notons $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à $n$ éléments dans un ensemble à $p$ éléments. On a déjà obtenu une formule de récurrence dans l'exercice 26. En utilisant un double comptage puis la formule[1] d'inversion de Pascal (vue dans l'exercice 41 du chapitre n° 7), retrouver le fait que, pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$,
$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

1. **Formule d'inversion de Pascal.** Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a_j.$$