

# Déterminant

## I Calculs de déterminants de matrices

**Exercice 1.** (★) Calculer les déterminants suivants :

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 56413 & 56513 \\ 29413 & 29513 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 92 & 74 \\ 72 & 59 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 7 & 30 & 37 \\ 10 & 38 & 50 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} a & \pi & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & b & 0 & 1543 \\ \sqrt{2} & -217 & c & 2025 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

$$9) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$10) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & d & f \\ -a & -b & -c & g \\ -a & -b & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

**Exercice 2.** (★) Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Étudier l'inversibilité de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.** (★) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ . Sans développer le déterminant suivant, prouver que

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$$

**Exercice 4.** (★) Posons

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

- 1) Expliciter la matrice  $B = TA$  et en déduire le déterminant de  $A$ .
- 2) En déduire le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.** (★) Montrer que, pour tout  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix} = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1}).$$

**Exercice 6.** (★) Que dire du déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire ?



**Exercice 16 – Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. (★★)** Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ . Notons  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$  et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On dit que  $C$  est la matrice compagnon de  $P$ . Montrer que  $\det(XI_n - C) = P$ .

**Exercice 17. (★★★)** Soit  $p \geq n$ . Calculer le déterminant de la matrice  $\left( \binom{p+i-1}{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Exercice 18. (★★★)** Soit  $n \geq 2$  et soit  $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ . Montrer que :

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0.$$

**Exercice 19.**

- 1) (★) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\overline{A}$  la matrice de taille  $n$  dont les coefficients sont les conjugués de ceux de  $A$ . Montrer que  $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$ .
- 2) (★★) Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui commutent. Montrer que  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

**Exercice 20. (★★★)** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que, pour tout  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ . Montrer que  $\det(A) = 0$  puis que  $A = 0$ .

## II Comatrice

**Exercice 21 – Propriétés des comatrices. (★★)**

- 1) Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Exprimer  $\text{com}(M)$  à l'aide de  $M^{-1}$ .
- 2) Soit  $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2$ . Montrer que  $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$ .
- 3) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables inversibles. Montrer que leurs comatrices sont semblables.
- 4) Montrer que la comatrice d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

**Exercice 22. (★★)** Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  telles que  $\det(A) \wedge \det(B) = 1$ . Montrer qu'il existe  $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$  tel que  $AU + BV = I_n$ .

**Exercice 23 – Groupe spécial linéaire. (★★)** On note  $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  de déterminant 1.

- 1) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $M$  a un inverse dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $\det(M) = \pm 1$ .
- 2) Vérifier que  $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$  est un groupe pour le produit.

**Exercice 24. (★★★)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- 1) Donner  $\det(\text{com}(A))$  en fonction de  $\det(A)$ .
- 2) Montrer que  $\text{rg}(\text{com}(A)) = n, 1$  ou  $0$  selon que  $\text{rg}(A) = n, \text{rg}(A) = n-1$  ou  $\text{rg}(A) \neq n-1$  respectivement.
- 3) Si  $n \geq 3$ , donner  $\text{com}(\text{com}(A))$ .

### III Utilisation du déterminant

**Exercice 25. (★)** On définit sur l'ensemble des bases de  $E$  la relation  $\sim$  par : pour toutes bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$ ,  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ . Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence et qu'elle possède deux classes d'équivalence.

On choisit arbitrairement l'une des deux classes d'équivalence et on dit que toutes les bases de cette classe d'équivalence sont directes, et toutes les autres sont indirectes.

**Exercice 26. (★★)** Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables sur  $\mathbb{C}$ . Montrer qu'elles sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

On commencera par écrire  $A = P^{-1}BP$  et  $P = Q + iR$  puis on s'intéressera à l'application  $z \in \mathbb{C} \mapsto \det(Q + zR)$ .

#### Exercice 27 – Formules de Cramer. (★★)

- 1) Considérons un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues  $AX = B$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , notons  $A_i$  la matrice égale à  $A$  sauf sa  $i^{\text{ième}}$  colonne qui est le vecteur colonne  $B$ . Montrer que ce système est de Cramer si et seulement si  $\det(A) \neq 0$  et que, dans ce cas, la solution  $X = (x_1, \dots, x_n)$  est telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ .

- 2) À l'aide de ces formules, résoudre le système

$$\begin{cases} 2 + y - z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 2 \\ 4x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

**Exercice 28. (★★)** Soient  $M_1, M_2$  et  $M_3$  trois points du plan dont les coordonnées dans un repère quelconque sont  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  et  $(x_3, y_3)$  respectivement. Montrer l'équivalence :

$$\text{les points } M_1, M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

### IV Déterminant d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs

**Exercice 29. (★)** Calculer le déterminant de l'endomorphisme  $u : P \mapsto XP' + P(1)$  de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Exercice 30. (★)** Pour quelle valeur de  $\alpha \in \mathbb{K}$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^3$  canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-il bijectif ?

**Exercice 31. (★)** Pour quelle valeur de  $t \in \mathbb{K}$  les trois vecteurs  $e_1 = (1, 1, t)$ ,  $e_2 = (1, t, 1)$  et  $e_3 = (t, 1, 1)$  forment-ils une base de  $\mathbb{K}^3$  ?

**Exercice 32. (★)** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . On définit l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est linéaire et donner son déterminant en fonction de celui de  $A$ .

**Exercice 33. (★)** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Calculer le déterminant de la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Exercice 34. (★★★)** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Considérons

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \in E^n \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, u(x_2), \dots, x_n) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n)),$$

où  $\mathcal{B}$  désigne une base quelconque de  $E$ . Montrer que  $\varphi = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$ .