Feuille d'exercices n° 30

Espaces vectoriels de dimension finie

Sauf indication contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dimension de sous-espaces vectoriels

Exercice 1. (★ à ★★) Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie. On précisera leur dimension et une base.

1) $F = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \,\middle|\, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c \right\}$.
2) L'ensemble des suites réelles arithmétiques à coefficients dans $\mathbb{K}$.
3) $D_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
4) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
   On rappelle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des termes diagonaux de M.
5) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
6) $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$ pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.
7) $F_\alpha = \{P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x} \mid (P,Q) \in (\mathbb{K}_n[X])^2\}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. (★★) Soit $p \geqslant 1$. Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodiques est un espace vectoriel de dimension p et en donner une base.

II Famille de vecteurs en dimension finie

Exercice 3. (★) On pose $e_1 = (1,0,0,\ldots,0), e_2 = (2,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (n, n-1, n-2, \ldots, 1)$ (les vecteurs étant dans $\mathbb{R}^n$). Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. (★) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,2,-1,3)$, $(3,-2,0,1)$ et $(-5,6,-1,1)$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. (★★) Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, posons $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1) Montrer que, pour tout $j \in [\![0\,;n]\!]$, X^j est combinaison linéaire de $P_j,\ldots,P_n$.
2) En déduire que la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. (★★) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une base constituée de matrices inversibles.

Exercice 7. (★) Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque. Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que, pour tout $p \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n) \leqslant \mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_p) + n - p$.

Exercice 8. (★) Soient $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_p)$ et $\mathscr{F} = (f_1,\ldots,f_p)$ des familles libres. On suppose que pour tout $i \in [\![1\,;p]\!], e_i \in \mathrm{Vect}(f_1,\ldots,f_i)$. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;p]\!], f_i \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_i)$.

Exercice 9. (★) Soient $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ des éléments d'un espace vectoriel E (pas forcément de dimension n). On suppose que $(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$ est libre. Montrer qu'il y a au moins n vecteurs libres parmi $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$.

III Applications linéaires en dimension finie

Exercice 10. (★) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(1,1,0) = (1,2,0)$, $f(1,0,1) = (3,-1,2)$ et $f(0,1,1) = (5,3,2)$. Déterminer le rang de f de deux façons différentes.

Exercice 11. (★) Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes. En déduire, sans plus de calcul, leur image, et leur éventuel caractère injectif/surjectif/bijectif.

1) $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y + z,\ x + y,\ x - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) $g : (x, y, z, t) \longmapsto (2x + y + z - t,\ -3x - y + 2t,\ 4x + z - t)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$,
3) $h : M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans lui même.
4) $\Phi : p \longmapsto (p(u),\ p(v),\ p(w))$ de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dans $(\mathbb{R}^3)^3$, où (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5) $D : f \longmapsto f'$ de $E = \mathrm{Vect}(\cos^2, \sin^2, \sin\cos, \sin, \cos)$ dans lui même.
6) $\varphi : P \longmapsto P - (X + 1)P'$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.

Exercice 12. (★) Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $f(F_1) = F_2$.

Exercice 13. (★) Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par automorphisme si, pour tout u automorphisme de E, $u(F) \subset F$.

1) Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe un automorphisme u de E tel que $u(x) = y$.
2) Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par automorphisme si et seulement si $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Exercice 14. (★) Montrer que $\varphi : P \longmapsto P(X) + P(X + 1)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15. (★) Montrer que $\varphi : P \longmapsto (P(0), P'(0), \ldots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exercice 16. (★) Construire, si c'est possible :

1) $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, -1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + z = 0\}$.
2) $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ telle que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, -1))$ et $\mathrm{Ker}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + z = 0\}$.
3) $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ telle que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$ et $\mathrm{Ker}(h) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z - t = 0\}$.
4) $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ telle que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}((1, 0, -1))$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + z - t = 0\}$.

Exercice 17. (★) Supposons que E soit de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$ ou $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 18. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0$ (attention à l'ordre des quantificateurs). Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 19 – Rang des endomorphismes nilpotents en dimension 3. (★★) Supposons que E soit de dimension 3. Soit f un endomorphisme non nul de E.

1) Montrer que, si $f^2 = 0$, alors $\mathrm{rg}(f) = 1$.
2) Montrer que, si $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$, alors $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Exercice 20 – Composition d'endomorphismes nilpotents. (★★)

1) Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
2) Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes nilpotents qui commutent. Montrer que $\mathrm{rg}(u_2 \circ u_1) \leqslant n - 2$.
3) Soient $u_1, \ldots, u_n$ n endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux. Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 21. (★★) Soient f et g des endomorphismes de E. Montrer que $\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ puis que $|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f - g)$.

Exercice 22. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 23. (★★) Montrer que n est pair si et seulement si il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 24. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que $\dim(f(F)) = \dim(F) - \dim(F \cap \mathrm{Ker}(f))$.
2) Montrer que $\dim(f^{-1}(F)) = \dim(F \cap \mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Exercice 25. (★) On note $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel stable par composition de dimension supérieure ou égale à 1.

Exercice 26. (★★) On suppose que E est de dimension n et que F est de dimension p, avec $n > p$. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de rang p. Que vaut $\mathrm{Ker}(v \circ u)$?

Exercice 27. (★★) Supposons que E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que u est un automorphisme de E.
2) Comparer $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et en déduire que $\dim\left(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})\right) \geqslant \dfrac{n}{2}$.
3) Supposons que $\dim\left(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})\right) = n - 1$.
   a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Justifier l'existence de $n-1$ vecteurs $e_2, \ldots, e_n$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.
   b) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 28. (★★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme u de E et un projecteur p tel que $f = u \circ p$.

Exercice 29. (★★★) On suppose dans cet exercice que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1) Soient $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E telle que $(x_1, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_{p-1}))$ est libre. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_p))$ est également une famille libre.
2) a) Soit $x_1 \neq 0$. Montrer que $(x_1, f(x_1))$ est une famille libre.
   b) Montrer que, si $n \neq 2$, alors il existe x_2 tel que $(x_1, x_2, f(x_1))$ est une famille libre.
   c) En déduire que $n \geqslant 4$.
3) Montrer que n est pair.
4) Donner un exemple de tel endomorphisme f dans le cas où $n = 2$.

Exercice 30. (★★★) Soient f et g deux endomorphismes de E. On considère les propriétés suivantes :

1) $f \circ g \circ f = f$ 2) $g \circ f \circ g = g$ 3) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$

Montrer que deux des trois propriétés impliquent la troisième. Si f est fixé, existe-t-il g tel que les trois propriétés soient vérifiées ?

Exercice 31. (★★★) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on notera $K_p = \mathrm{Ker}\left(u^p\right)$ et $I_p = \mathrm{Im}\left(u^p\right)$.

1) Montrer que les suites $(K_p)_{p \geqslant 0}$ et $(I_p)_{p \geqslant 0}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion. En déduire la monotonie de la suite $(\dim(K_p))_{p \in \mathbb{N}}$.
2) Montrer qu'il existe n_0 tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$.
3) Montrer que pour tout $p \geqslant n_0$, $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.
4) Montrer que I_{n_0} et K_{n_0} sont supplémentaires.
5) Soit $p \in \mathbb{N}$. On note v la restriction de u à I_p et w la restriction de u à I_{p+1}.
   a) Justifier le fait que v et w sont respectivement à valeurs dans I_{p+1} et I_{p+2}.
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}\, u \cap I_p$, puis que $\mathrm{Im}(v) = I_{p+1}$.
   c) En déduire que la suite $(\dim(K_{p+1}) - \dim(K_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

IV Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Exercice 32. (★)

1) Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(1, X+1, X^3 - X^2)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4) Déterminer un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(2) = P(4) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 33. (★) Dans chacun des cas suivants, prouver (à l'aide d'arguments de dimension) que F et G sont supplémentaires dans E.

1) $F = \mathrm{Vect}(1,2)$ et $G = \mathrm{Vect}(-1,1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
2) $F = \{(x,y,z) \mid x+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
3) $F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}(1,2,3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4) $F = \mathrm{Vect}\big((1,2,\dots,2n)\big)$ et $G = \{(x_1,\dots,x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.
5) $F = \mathrm{Vect}\big(X(X-1),(X-1)(X-2),X(X-2)\big)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, X^3|P\}$ dans $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 34. (★) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 35. (★) Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$. Montrer que ces sommes sont directes. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 36. (★) On ne suppose plus que E est de dimension finie, mais on se donne F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Redémontrer la formule de Grassmann à l'aide de l'application linéaire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

Exercice 37. (★★) Soient p,q,r appartenant à $[\![1\,;n]\!]$. Montrer qu'il existe F et G deux sev de E tels que $\dim(F) = p$, $\dim(G) = q$ et $\dim(F \cap G) = r$ si et seulement si $p + q - n \leqslant r \leqslant \min(p,q)$.

V Hyperplans et formes linéaires en dimension finie

Exercice 38. (★) On considère les 4 hyperplans H_1, H_2, H_3, H_4 de $\mathbb{R}^5$ d'équations respectives dans la base canonique : $(H_1) : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$; $(H_2) : x_1 = x_2 + x_3 - 3x_5$; $(H_3) : x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$ et $(H_4) : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$. Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$?

Exercice 39. (★★) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ stabilisant tous les hyperplans. Montrer que u est une homothétie.
On utilisera l'exercice 15 du chapitre n° 29.

Exercice 40. (★★) Soit H un hyperplan de E.

1) Soit $x_1 \notin H$. Montrer qu'on peut compléter x_1 en base de E avec des éléments n'appartenant pas à H.
2) Plus généralement, si $p \leqslant n$ et $x_1,\dots,x_p$ sont des vecteurs libres n'appartenant pas à H, montrer qu'on peut compléter la famille $(x_1,\dots,x_p)$ en base de E avec des éléments n'appartenant pas à H.

Exercice 41. (★★) Dans cet exercice $E = \mathbb{R}_n[X]$. On se donne $a_0,\dots,a_n$, $n+1$ réels distincts.

1) Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on note φ_k la forme linéaire définie sur E par $\varphi_k(P) = P(a_k)$. Montrer que $(\varphi_k)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ est une base de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
2) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in E$ tel que

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} A(a_k)P(a_k)$$

Exercice 42. (★★) Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille d'éléments de E et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

1) Justifier que F admet un supplémentaire dans E qu'on notera S.
2) Prouver que

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F, \mathbb{K}) \times \mathscr{L}(S, \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & (f|_F, f|_S) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

3) Soit

$$u\colon \begin{cases} \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{cases}$$

Prouver que $\mathrm{Ker}(u)$ est isomorphe à $\mathscr{L}(S, \mathbb{K})$.

4) Montrer que $(x_1, \dots, x_k)$ une famille libre si et seulement si, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ telle que $f(x_k) = \lambda_k$ pour tout k.

VI Utilisation de la dimension

Exercice 43 – Polynôme d'interpolation de Hermite. (★★) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ distincts et $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1\,; n]\!], \qquad P(a_i) = b_i \quad \text{et} \quad P'(a_i) = c_i.$$

On fera le lien avec les polynômes d'interpolation de Lagrange et on donnera une interprétation graphique.

Exercice 44. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \exists! P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\left(\frac{X}{2^i}\right).$$

Exercice 45. (★★) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble $\{P(A) \,|\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ des polynômes en A.

1) Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un espace vectoriel.
2) À l'aide de l'application $M \mapsto AM$, montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 46. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que

$$T\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'' + \omega^2 P \end{cases}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) En calculant $T(1), T(X), T(X^2), \dots, T(X^n)$, montrer que T est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Montrer que l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = x^n$ possède une unique solution polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction polynomiale f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + \omega^2 f(x) = x^n.$$

Attention, il n'y a a priori aucune condition sur le degré d'une éventuelle solution !