Feuille d'exercices n° 15

Ensembles et applications

I Ensembles

Exercice 1. (★) Soit $E=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;A;B;C;D;E;F\}$ l'ensemble des chiffres du système hexadécimal. Considérons les trois parties : $X=\{A;B;E;F\}$, $Y=\{0;2;4;6;8;A;C;E\}$ et $Z=\{3;5;7;9\}$. Donner en extension les parties suivantes :

$$\overline{X}\quad \overline{Y},\quad \overline{Z},\quad X\cap Y,\quad Y\cup\overline{X},\quad X\backslash Z,\quad \left(\overline{(\overline{Y}\cap X)\cup Z}\right)\backslash Y.$$

Exercice 2. (★) Rappelons que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Notons :

- I_0 l'ensemble des suites réelles de terme initial nul.
- M l'ensemble des suites réelles majorées.
- B l'ensemble des suites réelles bornées.
- L l'ensemble des suites réelles convergentes.
- Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, L_k l'ensemble des suites réelles qui convergent vers un réel de $[k\,;k+1[$.
- C l'ensemble des suites réelles croissantes.
- G l'ensemble des suites géométriques.

1) Écrire ces ensembles en compréhension, ainsi que l'ensemble $\overline{L}$.
2) Montrer que $B\subsetneq M$, $L\subsetneq B$, $(C\cap M)\subsetneq L$.
3) Décrire $L\cap G$.
4) Montrer que $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3. (★★) Soit E un ensemble non vide. Montrer que, pour toutes parties A, B et D non vides de E,

1) $\big(A\cup B=B\cap D\big)\ \Rightarrow\ \big(A\subset B\subset D\big)$,
2) $\big(\overline{A}\subset B\big)\ \Leftrightarrow\ \big(A\cup B=E\big)$,
3) $\left.\begin{array}{l}A\cup B=A\cup D\\ A\cap B=A\cap D\end{array}\right\}\ \Leftrightarrow\ B=D$,
4) $A\backslash B=\overline{B}\backslash\overline{A}$,
5) $A\backslash(B\cap D)=(A\backslash B)\cup(A\backslash D)$,
6) $\big((A\times B)\cup(B\times A)=D^2\big)\ \Leftrightarrow\ \big(A=B=D\big)$.

Exercice 4. (★) Soient A, B et D des parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A\cup B\cup D)\cap(A\cup B\cup\overline{D})\cap(A\cup D\cup\overline{B})=A\cup(B\cap D).$$

Exercice 5. (★) Soient E, F et G des ensembles non vides. Montrer que $(E\times G)\cap(F\times G)=(E\cap F)\times G$.

Exercice 6. (★) Montrer que le disque unité $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (★) Donner en extension l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ quand E est l'un des ensembles suivants :

$$\mathscr{P}(\varnothing),\qquad \{a;\{b\}\},\qquad \{\diamondsuit;\heartsuit\},\qquad \{0;\{0\};\{\{0\}\}\},\qquad \{\Lambda;0;*\},\qquad \{A;C;G;T\},\quad \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))).$$

Exercice 8. (★★) Soit $E=\{0;1;\{0\};\{0;1\}\}$. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$\{0\}\in E\qquad \{0\}\in\mathscr{P}(E),\qquad \{\{1\}\}\subset E,\qquad \{0;1\}\subset E,\qquad \{\{0\};0\}\subset\mathscr{P}(E)$$

$$\{\{0\};\varnothing\}\in\mathscr{P}(E),\qquad \{\{1;\{0;1\}\};\{0\};E\}\subset\mathscr{P}(E),\qquad \{\{\{0;1\}\}\}\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)).$$

Exercice 9. (★★) Soient E et F des ensembles. Étudier les inclusions entre les ensembles suivants :

1) $\mathscr{P}(E\cup F)$ et $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)$, 2) $\mathscr{P}(E\cap F)$ et $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$, 3) $\mathscr{P}(E\times F)$ et $\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(F)$.

Exercice 10 – Différence symétrique. (★★) Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on note $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ leur différence symétrique.

1) Représenter graphiquement la différence symétrique de deux parties de E.
2) Pour tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, montrer que $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
3) a) Pour tout $A\in\mathscr{P}(E)$, déterminer $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$.
   b) Pour tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, montrer que $A\Delta B=\varnothing$ si et seulement si $A=B$.
4) a) Montrer que Δ est commutative : pour tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, $A\Delta B=B\Delta A$.
   b) Montrer que Δ est associative : pour tout $(A,B,D)\in\mathscr{P}(E)^3$, $A\Delta(B\Delta D)=(A\Delta B)\Delta D$.
5) Montrer que, pour tout $(A,B,D)\in\mathscr{P}(E)^3$, $A\Delta B=A\Delta D$ si et seulement si $B=D$.
6) a) Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B}\equiv\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B\,[2]$.
   b) Proposer une autre démonstration de l'associativité de Δ.

Exercice 11. (★★) Soit E un ensemble. Soient A et B dans $\mathscr{P}(E)$. Discuter et résoudre l'équation suivante d'inconnue $X\in\mathscr{P}(E)$:

$$(A\cap X)\cup\left(B\cap\overline{X}\right)=\varnothing.$$

Exercice 12. (★★) Expliciter les ensembles suivants :

1) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[$,
2) $\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p}\,;\frac{2p+1}{p}\right[$,
3) $\displaystyle\bigcup_{x\in[0\,;2]}[x-1\,;x]$,
4) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}\,;2025-\frac{1}{n}\right]$,
5) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}\,;2025+\frac{1}{n}\right]$,
6) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}\,;2025-\frac{1}{n}\right]$,
7) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}\,;2025+\frac{1}{n}\right]$,
8) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k\,;-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k}\,;k\right]\right)$,
9) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{x\in\mathbb{R}\,|\,nx\in\mathbb{Z}\}$.

II Applications

Exercice 13. (★) Reformuler chacun des énoncés suivants par une phrase du type : « L'application de ... vers ... qui à ... associe ... est (ou n'est pas) injective (ou surjective, ou bijective) ».

1) Aucun élève de la classe ne partage sa date d'anniversaire avec un autre.
2) Tout réel est le logarithme népérien d'un unique réel strictement positif.
3) Lorsque $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, on peut avoir $a+b=c+d$ sans avoir $a=c$ et $b=d$.
4) Si a,b,c,d sont quatre rationnels tels que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, alors $a=c$ et $b=d$.

Exercice 14. (★) Soit $f:(p,q)\in\mathbb{N}^2\longmapsto p+q$. Donner $f(\mathbb{N}\times\{0\}), f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}), f^{-1}(\{4\}), f^{-1}(2\mathbb{N})$.

Exercice 15. (★) Les fonctions suivantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sont-elles injectives ? surjectives ?

$$f:n\longmapsto n+1,\qquad g:n\longmapsto\begin{cases}2025 & \text{si } n=0\\ n-1 & \text{sinon}\end{cases},\qquad f\circ g,\qquad g\circ f.$$

Exercice 16. (★) Notons f la fonction partie entière. Expliciter sans démonstration $f([0\,;1])$, $f([0\,;1[)$, $f(]0\,;1])$, $f(]0\,;1[)$, $f^{-1}([0\,;1])$, $f^{-1}([0\,;1[)$, $f^{-1}(]0\,;1])$, $f^{-1}(]0\,;1[)$ et enfin $f\left(f^{-1}\left([0\,;1]\right)\right)$ et $f^{-1}\left(f\left([0\,;1]\right)\right)$.

Exercice 17. (★) Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y\sqrt{2} \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y,z,x) \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x^2,x^3) \end{array}\right.$.

Exercice 18. (★★) Montrer que l'application

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array}\right.$$

n'est ni injective, ni surjective, et donner $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 19. (★★) Notons g la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f\circ g \end{array}\right.$.

2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & g\circ f \end{array}\right.$.

3) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f\times g \end{array}\right.$.

4) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f\times g \end{array}\right.$.

Exercice 20. (★) On reprend les notations de l'exercice 2.

1) L'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}\right.$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

2) L'application $\psi : \left\{\begin{array}{ccc} G\cap\overline{I_0} & \longrightarrow & \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1) \end{array}\right.$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

Exercice 21. (★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Montrer que, si f est périodique, alors f n'est pas injective.
2) Montrer que, si f est majorée ou minorée, alors f n'est pas surjective.

Exercice 22. (★) Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si f est une bijection de D sur $f(D)$.

Exercice 23. (★★) Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 24. (★★) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$f_a : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} x+a & \text{si } x\geqslant 0 \\ x-a & \text{si } x<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Montrer que f_a est injective non surjective si $a>0$, et surjective non injective si $a<0$. Que dire si $a=0$?

Exercice 25. (★) Notons $f : z \in \mathbb{C}\backslash\{2\} \longmapsto \dfrac{z+2\mathrm{i}}{z-2}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ sur un domaine de $\mathbb{C}$ à préciser. Expliciter f^{-1}.
2) Expliciter les ensembles suivants : $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathrm{i}\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{U})$ puis $f(\mathbb{R}-\{2\})$, $f(\mathrm{i}\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{U})$

Exercice 26. (★) Montrer de deux façons (par le calcul et par un raisonnement géométrique) qu'une similitude directe est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et donner sa bijection réciproque.

Exercice 27. (★★) Notons $f : z \in \mathbb{C}^* \longmapsto z - \dfrac{1}{z}$.

1) Soit $u \in \mathbb{C}$. Donner selon u le nombre d'antécédents de u par f.
2) Donner l'image de $\mathbb{U}$ par f et son interprétation géométrique.
3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathcal{D}^*(0,1)$ (disque ouvert de rayon 1 privé de son centre) sur son image.

Exercice 28. (★★) Pour tout $n \geqslant 1$, on note $D_+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.

1) Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Montrer que la fonction « produit »
$$\left\{\begin{array}{ccc} D_+(a) \times D_+(b) & \longrightarrow & D_+(ab) \\ (x,y) & \longmapsto & x \times y \end{array}\right.$$
est bijective.
2) Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Montrer que la fonction σ est semi-multiplicative, c'est-à-dire que pour tous a et b premiers entre eux, $\sigma(ab) = \sigma(a) \times \sigma(b)$.

Exercice 29 – Quelques ensembles dénombrables. (★★) On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur cet ensemble.

1) Montrer que $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensemble des entiers naturels impairs, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables.
2) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^p$ est dénombrable.
3) Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \not\subset [\![1\,;n]\!]$). On pose $a_0 = \min(A)$, $a_1 = \min(A \backslash \{a_0\})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \min(A \backslash \{a_0; a_1; \ldots; a_n\})$.
   a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b) Montrer que l'application $n \in \mathbb{N} \longmapsto a_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans A.

   Par conséquent toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 30 – Intervalles équipotents à $\mathbb{R}$. (★★) On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

1) Montrer que tout segment non réduit à un point est équipotent à $[0\,;1]$.
2) Montrer que tout intervalle ouvert non vide est équipotent à $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que l'application
$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow &]0\,;1[\\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N},\ x = \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$$
   est une bijection de $[0\,;1]$ sur $]0\,;1[$.
   b) En déduire que tout segment non réduit à un point est équipotent à $\mathbb{R}$.
4) a) Montrer que l'application
$$f : \left\{\begin{array}{ccc}]0\,;1] & \longrightarrow &]0\,;1[\\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{n+1} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N},\ x = \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$$
   est une bijection de $]0\,;1]$ sur $]0\,;1[$.
   b) En déduire que tout intervalle semi-ouvert borné et non vide est équipotent à $\mathbb{R}$.
   c) Montrer enfin que tout intervalle semi-ouvert non vide est équipotent à $\mathbb{R}$.

Cela montre que tout intervalle non vide et non réduit à un point est équipotent à $\mathbb{R}$.

Exercice 31. (★★) Soit E un ensemble et A une partie non vide de E. On définit l'application $f : X \in \mathscr{P}(E) \longmapsto X \cup A \in \mathscr{P}(E)$. Est-elle injective ? surjective ? Préciser $f(\mathscr{P}(E))$.

Exercice 32. (★) Soient E et F deux ensembles non vides tels que $E \subset F$. Montrer qu'il existe une injection de E dans F et une surjection de F sur E.

Exercice 33. (★★) Soit E et F deux ensembles non vides. Soit f une fonction de E dans F.

1) a) Montrer que f est injective si et seulement s'il existe g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
   b) Justifier que, dans ce cas, g est surjective de F dans E.
2) a) Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe g de F dans E telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
   b) Justifier que, dans ce cas, g est injective de F dans E.

Cela montre au passage que l'existence d'une injection d'un ensemble E dans un ensemble F est équivalente à l'existence d'une surjection de F dans E.

Exercice 34. (★★) Soit E un ensemble non vide et soit $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 35. (★★) Soient E, F et G des ensembles non vides. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1) Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective. Qu'en est-il de g ?
2) Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective. Qu'en est-il de f ?
3) Supposons que $g \circ f$ est injective et f surjective. Montrer que g est injective.
4) Supposons que $g \circ f$ est surjective et g injective. Montrer que f est surjective.

Exercice 36. (★★) Soient E et F des ensembles non vides. Soit f une application de E dans F.

1) a) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   b) Montrer que l'inclusion contraire est fausse en général.
   c) Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \qquad f^{-1}(f(A)) = A.$$

2) a) Montrer que, pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
   b) Montrer que l'inclusion contraire est fausse en général.
   c) Montrer que f est surjective si et seulement si

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \qquad f(f^{-1}(B)) = B.$$

Exercice 37. (★★) Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ des applications. Considérons l'application

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

1) Montrer que, si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2) Montrer que, si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 38 – Théorème de Cantor et paradoxe de Russell. (★★★) Soit E un ensemble non vide.

1) Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
   On pourra considérer la partie $\{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$.
2) Montrer le paradoxe de Russell : il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles (ce paradoxe montre l'insuffisance de la définition d'un ensemble comme collection d'objets).
3) a) Montrer que $A \longmapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ sur $\{0;1\}^E$.
   b) En déduire qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\{0;1\}^E$.