

# Espaces vectoriels

Dans toute cette feuille d'exercices,  $E$  et  $F$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Ces ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?

**Exercice 1 – Sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ .** (★) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\mathbb{R} \times \{0\}$ .                    | 6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 + 2y\}$ .       |
| 2) $\mathbb{Z}^2$ .                               | 7) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . |
| 3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ .     | 8) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ .    |
| 4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid  x  =  y \}$ . | 9) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ .    |
| 5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ .  | 10) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2z = 0\}$ .  |

**Exercice 2 – Sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .** (★) Les sous-ensembles constitués des triplets  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant les conditions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  ?

- |                               |  |   |
|-------------------------------|--|---|
| 1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .    | 7) $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$ . | 13) $\sin(x_1) + e^{x_2} - x_3^3 = 0$ .   |
| 2) $x_3 = 0$ .                | 8) $x_1^2 + x_2 + x_3 = 0$ .                 | 14) $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ .   |
| 3) $x_3 = 1$ .                | 9) $x_1x_2x_3 = 0$ .                         | 15) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$            |
| 4) $ x_1  =  x_2  =  x_3 $ .  | 10) $x_1 = x_2 = x_3$ .                      | 16) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{ou } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ |
| 5) $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$ . | 11) $ x_1 + x_2  + x_3 = 0$ .                |   |
| 6) $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ .  | 12) $x_1x_2 = x_2x_3 = 0$ .                  |   |

**Exercice 3 – Espaces de matrices.** (★) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les matrices de cet exercice sont supposées à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- 1) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des coefficients diagonaux est nulle.
- 2) L'ensemble des matrices carrés inversibles dont l'inverse est égal à la transposée.
- 3) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des coefficients diagonaux est égale à 2025.
- 4) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des carrés des coefficients diagonaux est nulle.
- 5) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des carrés des coefficients diagonaux est nulle.
- 6) L'ensemble des matrices carrées de diagonale nulle.
- 7) L'ensemble des matrices carrées  $M$  telles que  $AM + MA = 0$ .
- 8) L'ensemble des matrices carrées  $M$  telles que  $M + M^T = 2I_n$ .
- 9) L'ensemble des matrices carrées  $M$  telles que  $M^2 = M$ .

**Exercice 4 – Espaces de polynômes.** (★) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  non nul. Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- 1) L'ensemble des polynômes de degré  $n$ .
- 2) L'ensemble des polynômes qui divisent  $A$ .
- 3) L'ensemble des polynômes multiples de  $A$ .
- 4) L'ensemble des polynômes dont  $a$  est racine de multiplicité  $n$ .
- 5) L'ensemble des polynômes dont  $a$  est racine de multiplicité au moins  $n$ .
- 6) L'ensemble des polynômes scindés ou nuls (cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).
- 7) L'ensemble des polynômes  $P$  tels que  $X^2P'' + nXP' = P - P(3)$ .
- 8) L'ensemble des polynômes  $P$  tels que  $P + X^2 = XP'$ .

**Exercice 5 – Espaces de fonctions.** (★) Les ensembles suivants sont supposés être inclus dans  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  avec  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point. Sont-ils des espaces vectoriels ?

- 1) L'ensemble des fonctions dérivables en 2025.
- 2) L'ensemble des fonctions continues en 2025.
- 3) L'ensemble des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant  $f(0) + f(1) = f'(0)$ .
- 4) L'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .
- 5) L'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^1$  mais pas  $\mathcal{C}^2$ .
- 6) L'ensemble des fonctions convexes.
- 7) L'ensemble des fonctions convexes ou concaves.
- 8) L'ensemble des fonctions non dérivables en 0.
- 9) L'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $f(0) = 1$ .
- 10) L'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $f(1) = 0$ .
- 11) L'ensemble des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .
- 12) L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
- 13) L'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas.
- 14) L'ensemble des fonctions nulles en 0 et en 1.
- 15) L'ensemble des fonctions nulles en 0 ou en 1.
- 16) L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie en  $+\infty$ .
- 17) (★★) L'ensemble des fonctions lipschitziennes.
- 18) (★★) L'ensemble des fonctions uniformément continues.
- 19) L'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle.
- 20) L'ensemble des fonctions majorées.
- 21) L'ensemble des fonctions bornées.
- 22) L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle  $y' + y = 1$ .
- 23) L'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 - x)$ .
- 24) L'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + f(\frac{1}{-1}x)$ .
- 25) L'ensemble des fonctions continues sur  $I = [0; 1]$  telles que  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ .
- 26) (★★) L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie ou infinie en  $+\infty$ .

**Exercice 6 – Espaces de suites.** (★) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- 1) L'ensemble des suites convergentes.
- 2) L'ensemble des suites qui convergent vers 0.
- 3) L'ensemble des suites qui convergent vers 1.
- 4) L'ensemble des suites qui divergent.
- 5) L'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n = o(n)$ .
- 6) L'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n \sim n$ .
- 7) L'ensemble des suites qui admettent 0 comme valeur d'adhérence.
- 8) L'ensemble des suites positives.
- 9) L'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 + u_1 = 0$ .
- 10) L'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 u_1 = 0$ .
- 11) L'ensemble des suites bornées.
- 12) L'ensemble des suites arithmétiques.
- 13) L'ensemble des suites géométriques.
- 14) L'ensemble des suites croissantes.
- 15) L'ensemble  $\{(a(-1)^n + b \cos(n))_{n \in \mathbb{N}} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- 16) L'ensemble des suites monotones.

**Exercice 7.** (★★) Montrer que l'ensemble  $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$  est un espace vectoriel.

## II Familles de vecteurs

**Exercice 8. (★)** Pour chacune des familles suivantes, déterminer une base de l'espace qu'elle engendre puis caractériser cet espace à l'aide d'une ou de plusieurs équations.

- 1)  $((1, 1, 0, -1), (2, 1, -1, 2), (1, -1, -2, 3))$ .      2)  $((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5))$ .

**Exercice 9. (★)** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre de  $E$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

- 1)  $(x_3, x_1)$  lorsque  $n \geq 3$ .      4)  $(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ .  
 2)  $(x_1, 2x_1 + x_4, x_4)$  lorsque  $n \geq 4$ .      5)  $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1)$ .  
 3)  $(x_1, 2x_2, x_3)$  lorsque  $n \geq 3$ .      6) (★★)  $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_n + x_1)$ .

**Exercice 10. (★)** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Donner une CNS pour que  $(1, e^{i\theta})$  soit une famille libre dans  $\mathbb{C}$  considéré comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Et dans  $\mathbb{C}$  considéré comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

**Exercice 11. (★)** Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

- 1)  $(x \mapsto x^2, \cos, \exp, \ln)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{+*}}$ .      13)  $((2^n)_n, ((-1)^n)_n, (1)_n)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
 2)  $(\cos, \sin, x \mapsto 1)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .      14)  $((2^n)_n, ((-1)^n)_n, ((-1)^{n+1})_n)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
 3)  $(\cos^2, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto 1)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .      15)  $\left( (n^k)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
 4)  $(\text{Id}_{\mathbb{R}}, \sin^2, \cos^2, x \mapsto \cos(2x))$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .      16)  $((1)_n, (n)_n, (2^n)_n, (3^n)_n)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
 5)  $(\text{Id}_{\mathbb{R}}, \sin, \cos, x \mapsto \cos(2x))$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .      17)  $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .  
 6)  $((1, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 3), (1, 0, 1, 0))$  dans  $\mathbb{R}^4$ .      18)  $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ .  
 7)  $((3, 2, 1, 4), (1, 1, 1, 3), (4, 2, 0, 3))$  dans  $\mathbb{R}^4$ .      19)  $\left( x \mapsto \frac{1}{1+x^k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{+}}$ .  
 8)  $((1, 5, 6), (2, 3, 0), (3, 8, 6), (1, 0, 0))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .      20)  $(x \mapsto x^k e^{kx})_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .  
 9)  $((2, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .      21)  $(x \mapsto e^{-kx^2})_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .  
 10)  $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .      22)  $(x \mapsto \cos^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .  
 11)  $((1, 2, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .  
 12)  $((1, 0, 1), (2i, 2, 0), (0, 1, -i))$  dans  $\mathbb{C}^3$ .

**Exercice 12. (★★)** Soit  $I$  un intervalle non trivial et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue non constante. Montrer que  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille libre.

**Exercice 13. (★)** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ . Exprimer les coordonnées d'un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  dans cette base.

**Exercice 14. (★)** Soient  $a, b$  et  $c$  des éléments de  $\mathbb{R}$  deux à deux distincts. Introduisons les polynômes  $P_0 = 1, P_1 = (X - a)$  et  $P_2 = (X - a)(X - b)$ . Déterminer les coefficients de tout polynôme de  $\mathbb{K}_2[X]$  dans la base  $(P_0, P_1, P_2)$  en fonction de  $P(a), P(b)$  et  $P(c)$ .

**Exercice 15. (★)**

- 1) Montrer que  $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées de  $(8, 4, 2)$  dans cette base.  
 2) Montrer que  $(X^3 + X^2 - X - 1, X^3 - X^2 + 1, X^3 - X^2 + X, X^3 + 2X + 1)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  et déterminer les coordonnées de  $X^2$  dans cette base.

**Exercice 16. (★★)** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . Déterminer une base des sous-espaces vectoriels  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ .

On commencera par traiter les cas où  $n = 2$  puis  $n = 3$ .

**Exercice 17. (★)** Montrer que  $\text{Vect}(x \mapsto 1, \text{Arccos}, \text{Arcsin})$  admet une base à deux éléments de  $\mathbb{R}^{[-1;1]}$ .

**Exercice 18. (★★)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathcal{E} = \{x \mapsto P(x) \sin(x) + Q(x) \cos(x) \mid (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dont on déterminera une base.

**Exercice 19. (★)** Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

- 1)  $\{x \mapsto A \cos(x + \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$
- 2)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ .
- 3)  $\{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1 - X) = P(X)\}$ .
- 4)  $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X^2) = (X^3 + 1)P\}$ .
- 5)  $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ \text{et } 2x - y = 0 \end{array} \right\}$ .
- 6)  $\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(0) = P(1) = P(2)\}$ .
- 7)  $\left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid M \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$ .
- 8)  $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$ .
- 9)  $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ .
- 10)  $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(1) = P(0)\}$ .

**Exercice 20. (★)** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Posons  $e_1 = (1, 1, -1)$ ,  $e_2 = (1, 2, 4)$ ,  $e_3 = (3, -1, a)$  et  $e_4 = (2, 3, b)$  (ce sont des vecteurs de  $\mathbb{K}^3$ ). Déterminer  $a$  et  $b$  pour qu'on ait  $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_3, e_4)$ .

### III Propriétés de sous-espaces vectoriels

**Exercice 21. (★★)** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que si  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Exercice 22. (★★)** Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n \subset E_{n+1}$ . Montrer que pour tous  $n \leq p$ ,  $E_n$  est inclus dans  $E_p$  puis montrer que  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Exercice 23. (★★)** Montrer que  $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 24. (★★★)** Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  sont  $\{(0, 0)\}$ ,  $\mathbb{R}^2$  et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces  $\{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ ).

**Exercice 25. (★★)** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  distinct de  $E$ . Notons  $\bar{F}$  le complémentaire de  $F$ .

- 1)  $\bar{F}$  est-il un espace vectoriel ?
- 2) Montrer que, pour tous  $x \in F$  et  $y \in \bar{F}$ ,  $x + y \in \bar{F}$ . En déduire que  $E = \text{Vect}(\bar{F})$ . Illustrer par un dessin.

**Exercice 26. (★)** Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Montrer que  $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$  et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

### IV Sommes de sous-espaces vectoriels

**Exercice 27. (★)** Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $F_1 + F_2 = F_1 \cap F_2$  si et seulement si  $F_1 = F_2$ .

**Exercice 28. (★★)**

- 1) Soient  $F_1, F_2, F_3$  trois sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $(F_1 \cap F_2) + (F_1 \cap F_3) \subset F_1 \cap (F_2 + F_3)$  et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- 2) Montrer que  $F_1 + (F_2 \cap F_3) \subset (F_1 + F_2) \cap (F_1 + F_3)$  et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si  $F_1 \subset F_2$ , alors il y a égalité.

**Exercice 29. (★★)** Soient  $(u, v) \in E^2$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $F + \text{Vect}(u) = F + \text{Vect}(v)$  si et seulement s'il existe  $x \in F$  et deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  non nuls tels que  $x + \alpha u + \beta v = 0$ .

**Exercice 30. (★★)** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , notons  $E_a$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  s'annulant en  $a$ .

- 1) Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $E_a$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- 2) Soient  $a \neq b$ . Montrer que  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = E_a + E_b$ .
- 3) La somme de  $E_a$  et  $E_b$  peut-elle être directe ?

**Exercice 31. (★★)** Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $F_1 + F_2 = E$ . Soit  $F_3$  un supplémentaire de  $F_1 \cap F_2$  dans  $F_1$ . Montrer que  $F_2 \oplus F_3 = E$ .

**Exercice 32. (★)** Montrer à chaque question que  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires dans  $E$ .

- 1)  $F_1 = \text{Vect}(1, 2)$  et  $F_2 = \text{Vect}(-1, 1)$  dans  $E = \mathbb{R}^2$ .
- 2)  $F_1 = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$  et  $F_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}$  dans  $E = \mathbb{R}^3$ .
- 3)  $F_1 = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  et  $F_2 = \{(x + y, x + y, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  dans  $E = \mathbb{R}^3$ .
- 4)  $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$  et  $F_2 = \text{Vect}(0, 1, 0)$  dans  $E = \mathbb{R}^3$ .
- 5)  $F_1 = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$  et  $F_2 = \text{Vect}(1, 2, 3)$  dans  $E = \mathbb{R}^3$ .
- 6)  $F_1 = \text{Vect}(1, \dots, 1)$  et  $F_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\}$  dans  $E = \mathbb{K}^n$ .
- 7) (★★)  $F_1 = \text{Vect}(1, 2, \dots, 2n)$  et  $F_2 = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$  dans  $E = \mathbb{R}^{2n}$ .
- 8)  $F_1$  l'ensemble des suites constantes et  $F_2$  l'ensemble des suites qui convergent vers 0 dans  $E$  l'ensemble des suites convergentes.
- 9)  $F_1 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$  et  $F_2 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$  dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- 10)  $F_1$  l'ensemble des fonctions affines et  $F_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  dans  $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- 11)  $F_1$  l'ensemble des fonctions nulles en 0 et  $\pi/2$  et  $F_2 = \text{Vect}(\sin, \cos)$  dans  $E = \mathcal{C}^0([0; \pi], \mathbb{R})$ .
- 12)  $F_1$  l'ensemble des fonctions constantes et  $F_2$  l'ensemble des fonctions nulles en 0 dans  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- 13)  $F_1$  l'ensemble des fonctions constantes et  $F_2 = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$  dans  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## V Autour de la définition des espaces vectoriels

**Exercice 33. (★)** Notons  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  et  $(C_4)$  les quatre propriétés de la définition d'un espace vectoriel, comme dans le cours.

- 1) Munissons  $E = \mathbb{C}^n$  de l'addition usuelle et du produit externe  $\cdot$  défini par :

$$\forall(\lambda, (x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{C} \times E, \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\text{Re}(\lambda) \times x_1, \dots, \text{Re}(\lambda) \times x_n).$$

Montrer que  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  sont vérifiées mais pas  $(C_4)$ .

- 2) Munissons  $E = \mathbb{K}^n$  de l'addition usuelle et du produit externe  $\cdot$  défini par :

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda \cdot x = x.$$

Montrer que  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_4)$  sont vérifiées mais pas  $(C_3)$ .

- 3) Notons  $\mathcal{D} = \{(0, z) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ . Munissons  $E = \mathbb{C}^2$  de l'addition usuelle et du produit externe  $\cdot$  défini par :

$$\forall(\lambda, (x, y)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, \quad \lambda \cdot (x, y) = \begin{cases} (\lambda x_1, \lambda x_2) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ (\bar{\lambda} x_1, \bar{\lambda} x_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $(C_1)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_4)$  sont vérifiées mais pas  $(C_2)$ .

- 4) Munissons  $E = \mathbb{K}^n$  de l'addition usuelle et du produit externe  $\cdot$  défini par :

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda \cdot x = (0, \dots, 0).$$

Montrer que  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_4)$  sont vérifiées mais pas  $(C_1)$ .

Ainsi les hypothèses  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  et  $(C_4)$  sont indépendantes (c'est-à-dire que trois d'entre elles peuvent être vérifiées sans que la quatrième le soit) si bien qu'elles sont bien toutes indispensables dans la définition d'un espace vectoriel.

**Exercice 34 – Complexifié d'un espace vectoriel réel. (★★)** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit le produit cartésien  $E \times E$  de l'addition usuelle :

$$\forall((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in E^2, \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$\forall((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in E^2, \quad (a + ib) \cdot (x, y) = (a \cdot x - b \cdot y, b \cdot x + a \cdot y)$$

Montrer que  $E \times E$ , muni de ces deux lois, est alors un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.