

Fractions rationnelles

Exercice 1. (★) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

$$1) \frac{X^4 + 1}{X^4 - 1}, \quad 2) \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}, \quad 3) \frac{X^2 + 1}{X^2(X - 1)^2}, \quad 4) \frac{X^{16} + 1}{X^4 + 1}.$$

Exercice 2. (★) Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 3. (★) Soient F et G deux fractions rationnelles dont les fonctions rationnelles associées coïncident en une infinité de points. Montrer que $F = G$.

Exercice 4. (★) Soit $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} les fractions rationnelles $\frac{X}{X^n - 1}$ et $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Exercice 5. (★) Montrer que $A = \{R \in \mathbb{C}(X) \mid \deg(R) \leq 0\}$ est un anneau.

L'ensemble $\left\{ \frac{1}{P} \mid P \in \mathbb{K}[X]^* \right\} \cup \{0\}$ est-il un sous-anneau de A ?

Exercice 6. (★★) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} la fraction rationnelle $F = \frac{1}{(X^3 - 1)^2}$.
On pourra comparer $F(X)$ et $F(jX)$.

Exercice 7. (★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. En utilisant une décomposition en éléments simples, donner une CNS pour que P' divise P .

Exercice 8. (★★) On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}[X]$. On suppose que P est scindé à racines simples. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $Q_\alpha = P + \alpha P'$.

- 1) Déterminer les variations de la fonction rationnelle associée à $\frac{Q_\alpha}{P}$.
- 2) En déduire que Q_α est scindé à racines simples.

Exercice 9. (★★) On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}(X)$. Soit $n \geq 1$. Posons $G = \frac{X^n}{(X + 1)^n}$.

- 1) Donner la décomposition en éléments simples de $G(X - 1)$. En déduire celle de G .
- 2) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{X^{2n}}{(X^2 + 1)^n}$.

Exercice 10 – Théorème de Gauss-Lucas. (★★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P' . Montrer que α peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de somme 1 (on parle de combinaison linéaire convexe) des racines de P . Interpréter géométriquement ce résultat.

On pourra utiliser la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ et le fait que 0 est son propre conjugué.

Exercice 11. (★★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que P admet n racines simples notées z_1, \dots, z_n .

- 1) Donner la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(z_k)}$. On séparera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.
- 2) Montrer que, si $z_k \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k P'(z_k)} = \frac{-1}{P(0)}$.

Exercice 12. (★★) Soit $n \geq 1$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Posons $R = X(X - 1) \dots (X - n)$. Donner la valeur de $\sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{R'(k)}$ et en déduire que parmi $|P(0)|, \dots, |P(n)|$, l'un au moins est supérieur ou égal à $\frac{n!}{2^n}$.

Exercice 13. (★★) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Montrer que $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega} = \frac{n-1}{2}$.

Exercice 14. (★★) Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P'(x))^2 \geq P(x)P''(x)$.

Exercice 15 – Dérivée formelle d'une fraction rationnelle. (★★) Soient A, B, C, D dans $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$. Supposons que $AD = BC$.

1) Vérifier que $(A'B - AB')D^2 = (C'D - CD')B^2$.

Cela garantit que la fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix des polynômes A et B formant la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$. Ainsi on définit la dérivée formelle de $R = \frac{A}{B}$ et on note $R' = \frac{A'B - AB'}{B^2}$.

2) Soient R et F dans $\mathbb{K}(X)$.

a) Vérifier que $(R + F)' = R' + F'$, $(RF)' = R'F + RF'$.

b) Vérifier que, lorsque $R \neq 0$, $\left(\frac{F}{R}\right)' = \frac{F'R - FR'}{R^2}$.

c) Montrer que, lorsque $R \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $(R^n)' = nR'R^{n-1}$.

d) Vérifier que, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors la dérivée de P en tant que fraction rationnelle coïncide avec sa dérivée en tant que polynôme.

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. On définit par récurrence les dérivées successives de R par : $R^{(0)} = R$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R^{(n+1)} = (R^{(n)})'$.

3) (★★★) Application : décomposer $R = \frac{1}{X^2 + 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(X^2 + 1)^{n+1}} \prod_{k=1}^n \left(X - \cotan\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \right).$$

Exercice 16. (★★★) On se donne dans cet exercice deux entiers naturels $n < m$. On note $\omega = e^{i\pi/2m}$.

1) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_{-x}^x \frac{dt}{t - z}$ est bien définie puis que

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t - z} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn}(y) \times i\pi$$

où $\operatorname{sgn}(a)$ est le signe du réel a , c'est-à-dire 1 si a est strictement positif, et -1 si a est strictement négatif (on justifiera donc pourquoi y est non nulle)

2) Montrer que la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) de $\frac{X^{2n}}{1 + X^{2m}}$ est :

$$\frac{X^{2n}}{1 + X^{2m}} = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega^{2k+1}}$$

où, pour tout $k \in \llbracket 0; 2m-1 \rrbracket$, $\alpha_k = \frac{-\omega^{(2k+1)(2n+1)}}{2m}$.

3) Montrer que $\sum_{k=m}^{2m-1} \alpha_k = -\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k$.

4) Donner le signe de $\operatorname{Im}(\omega^{2k+1})$ selon la valeur de $k \in \llbracket 0; 2m-1 \rrbracket$.

5) Montrer que

$$\int_{-x}^x \frac{t^{2n}}{1 + t^{2m}} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{m \sin\left(\frac{2n+1}{2m}\pi\right)}$$

On pourra poser $\beta = \omega^{2n+1}$ pour simplifier les calculs.