

# Groupe symétrique

Dans cette feuille d'exercices,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 3.

## Exercice 1 – Décompositions en vrac. (★)

- 1) La permutation  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle un cycle ?
- 2) Montrer que  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  est la composée de deux cycles à supports disjoints.
- 3) Expliciter la permutation  $\sigma_3 = (12743) \circ (64352) \circ (81376)$  puis l'écrire comme composée de cycles à supports disjoints.
- 4) Même question avec  $\sigma_4 = (1243) \circ (6452) \circ (8637) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ .
- 5) Donner les signatures de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$ .
- 6) Écrire  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  comme produit de transpositions de deux manières différentes.

**Exercice 2. (★★)** Donner toutes les permutations qui commutent avec le  $n$ -cycle  $(12 \dots n)$ .

**Exercice 3. (★★)** Soit  $\sigma \in S_n$  telle que  $\sigma^2 = \text{id}_n$ . Que dire de la décomposition de  $\sigma$  en produit de cycles à supports disjoints ? En déduire que si  $n$  est impair, alors  $\sigma$  admet un point fixe.

**Exercice 4. (★★)** Déterminer la signature de la permutation  $\sigma$  telle que, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\sigma(k) = n + 1 - k$ .

**Exercice 5 – Une autre définition de la signature. (★)** Soit  $\sigma \in S_n$ . On appelle inversion de  $\sigma$  tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  tel que  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Notons  $I_\sigma$  est le nombre d'inversions de  $\sigma$ . Montrer que  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I_\sigma}$ .

**Exercice 6 – Autre formule de calcul de la signature. (★)** Soit  $\sigma \in S_n$ . Notons  $f$  le nombre de points fixes par  $\sigma$  et  $k$  le nombre de cycles dans la décomposition de  $\sigma$  en produit de cycles à supports disjoints. Montrer que  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k-f}$ .

**Exercice 7 – Sous-groupe alterné. (★★)** On note  $A_n$  les éléments de  $S_n$  de signature 1.

- 1) Justifier que  $A_n$  est un sous-groupe de  $S_n$ .
- 2) Décrire  $A_3$ .
- 3) a) Soit  $\tau$  une transposition de  $S_n$ . Montrer que  $f : \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$  est bijective de  $S_n$  sur  $S_n$ .  
b) En déduire que  $A_n$  est de cardinal  $\frac{n!}{2}$ .
- 4) Montrer que  $A_n$  est engendré par les 3-cycles.

*On dit qu'un groupe est engendré par une partie  $H$  de  $G$  lorsque tout élément de  $G$  s'écrit comme un produit d'éléments de  $H$ .*

**Exercice 8 – Conjugaison. (★★)** Deux éléments  $s$  et  $r$  de  $S_n$  sont dits conjugués s'il existe  $\sigma \in S_n$  tel que  $r = \sigma \circ s \circ \sigma^{-1}$ .

- 1) Montrer que la relation « être conjugué » est une relation d'équivalence.
- 2) Soient  $\sigma \in S_n, p \in \llbracket 2; n \rrbracket$  et  $(a_1 a_2 \dots a_p)$  un  $p$ -cycle. Montrer que :

$$\sigma \circ (a_1 a_2 \dots a_p) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \sigma(a_2) \dots \sigma(a_p))$$

- 3) En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement s'ils ont même longueur.
- 4) (★★★) Soient  $s$  et  $r \in S_n$ . Donner une CNS portant sur les longueurs des cycles apparaissant dans les décompositions de  $s$  et  $r$  en produit de cycles à supports disjoints pour que  $s$  et  $r$  soient conjugués.

**Exercice 9 – Caractérisation de la signature. (★★)** Soit  $\varphi$  un morphisme de groupes de  $S_n$  dans  $\mathbb{C}^*$ .

- 1) Soit  $\tau \in S_n$  une transposition. Montrer que  $\varphi(\tau) \in \{-1; 1\}$ .
- 2) Montrer que toutes les transpositions ont la même image. On pourra utiliser l'exercice précédent.
- 3) En déduire que la signature est l'unique morphisme non trivial (c'est-à-dire non constant égal à 1) de  $S_n$  dans  $\mathbb{C}^*$ .

**Exercice 10 – Ordre d'une permutation. (★★)**

- 1) Montrer que pour tout  $\sigma \in S_n$ , il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma^k = \text{id}_n$ .
- 2) Justifier que, pour tout  $\omega \in S_n$ , il existe un plus petit entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma^k = \text{id}_n$ . On l'appelle l'ordre de  $\sigma$ .
- 3) Soit  $\sigma \in S_n$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\sigma^k = \text{id}_n$  si et seulement si  $\omega(\sigma) | k$ .
- 4) Montrer que, si  $\tau$  et  $\sigma$  sont deux permutations à supports disjoints, alors  $\omega(\sigma \circ \tau) = \omega(\sigma) \vee \omega(\tau)$ .
- 5) Soit  $\sigma \in S_n$ . Calculer  $\omega(\sigma)$  en fonction des longueurs des cycles apparaissant dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
- 6) Calculer les ordres des permutations  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$  de l'exercice 1.
- 7) Combien  $S_7$  contient-il d'éléments d'ordre 12? On pourra utiliser l'exercice 11.

**Exercice 11 – Générateurs de  $S_n$ . (★★★)**

- 1) a) Soient  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Calculer  $(1 \ i) (1 \ j) (1 \ i)$ .  
b) En déduire que les transpositions  $(1 \ 2), (1 \ 3), \dots, (1 \ n)$  engendrent  $S_n$ , c'est-à-dire que tout élément de  $S_n$  s'écrit comme produit de ces transpositions.  
c) Donner une telle écriture du  $n$ -cycle  $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ .  
d) Le résultat est-il toujours vrai si l'on retire une de ces transpositions?
- 2) Montrer que les transpositions  $(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)$  engendrent  $S_n$ .
- 3) Notons  $t = (1 \ 2)$  et  $c = (1 \ 2 \ \dots \ n)$ 
  - a) Calculer  $c^k t c^{-k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$ . En déduire que  $t$  et  $c$  engendrent  $S_n$ .
  - b) Montrer que l'un de ces deux éléments ne peut engendrer  $S_n$  à lui seul.  
*On rappelle que  $S_n$  est non abélien si  $n \geq 3$ .*

**Exercice 12. (★)** Dénombrer les permutations  $\sigma \in S_{2n}$  telles que  $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)$  et  $\sigma(2n) < \sigma(2n-1) < \dots < \sigma(n+1)$ .

**Exercice 13. (★★)**

- 1) Soit  $p \in \llbracket 2; n \rrbracket$ . Combien  $S_n$  contient-il de  $p$ -cycles?
- 2) Combien y a-t-il de permutations dans  $S_{20}$  dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints comporte trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes?

**Exercice 14. (★★)** Soit  $\sigma \in S_n$  et soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On dit que  $\sigma$  bat un record en  $k$  si, pour tout  $i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$ ,  $\sigma(i) < \sigma(k)$ . Donner la probabilité que  $\sigma$  batte un record en  $k$ .

**Exercice 15 – Points fixes d'une permutation aléatoire. (★★)** On choisit dans cet exercice une permutation  $\sigma \in S_n$  aléatoirement et de façon uniforme.

- 1) Expliciter un espace probabilisé fini qui modélise cette expérience. On note dans la suite de cet exercice  $N_n$  la variable aléatoire égale à son nombre de points fixes.
- 2) Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , notons  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si  $k$  est un point fixe de  $\sigma$ , et qui vaut 0 sinon. Expliciter la loi de  $X_k$ . Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont-elles mutuellement indépendantes?
- 3) Exprimer  $N_n$  en fonction de  $X_1, \dots, X_n$  et en déduire  $\mathbb{E}(X_n)$  ainsi que  $\mathbb{V}(X_n)$ .