Feuille d'exercices n° 24

Intégration sur un segment

Sauf indication contraire, I désigne est un intervalle non vide et non réduit à un point, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

I Fonctions uniformément continues

Exercice 1. (★) Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que f est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (★) Montrer que $x \longmapsto x\ln(x)$ est uniformément continue sur $]0\,;1]$.

Exercice 3. (★★) Montrer que $x \longmapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (★★) Soient f et g deux fonctions uniformément continues sur un intervalle I.

1) Étudier l'uniforme continuité sur I de $f+g$, de $f \times g$ et de $1/f$ lorsque f ne s'annule pas.
2) On suppose que $f(I) \subset I$. La fonction $g \circ f$ est-elle uniformément continue sur I ?
3) On suppose que f est strictement monotone sur I. La fonction f^{-1} est-elle uniformément continue sur $J = f(I)$?

Exercice 5 – Les fonctions UC sont sous-affines. (★★★) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f(x)| \leqslant ax+b$.

Exercice 6. (★★★)

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2) Même question en remplaçant « lipschitzienne » par « uniformément continue ».
3) Donner un contre-exemple si on suppose simplement la continuité.

Exercice 7. (★★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue. Une fonction bornée et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle forcément uniformément continue ?

II Utilisation des propriétés de l'intégrale

Exercice 8. (★) Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soient $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Justifier l'existence de α et β et prouver que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant -\alpha\beta$.

Exercice 9. (★★) Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f \in \mathscr{C}^0\left([0\,;1]\,,\mathbb{R}\right),\ f(0)=f(1)=1 \right\}$$

admet une borne inférieure, que celle-ci est nulle et qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 10 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. (★★) Soient f et g deux fonctions continues pat morceaux sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles. Calculer le discriminant du trinôme $\int_a^b \big(f(t)+Xg(t)\big)^2\,dt$ et en déduire que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\;\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Discuter le cas d'égalité.

Exercice 11 – Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$.

1) (★★) Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
si et seulement si f est de signe constant.

2) (★★★★) Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in [a\,;b]$, $f(t) = |f(t)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (autrement dit f a un argument constant sur l'ensemble des points où elle ne s'annule pas).

Exercice 12 – Formule de la moyenne. (★★)

1) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, soit $g : [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Soit $\eta > 0$. Soit f une fonction continue sur $[0\,;\eta]$ et à valeurs réelles.

a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$

b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

3) (★★★) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante et soit $g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13. (★★★) Les deux questions sont indépendantes, mais les méthodes sont analogues.

1) Soit f continue sur $[0\,;\pi]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois.

2) Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

III Suites et fonctions définies à l'aide d'intégrales

Exercice 14. (★) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt.$

Exercice 15. (★★) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(t))^n\,\mathrm{d}t.$

Exercice 16. (★) Donner le domaine de définition des fonctions
$$f : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
ainsi que leur signe sur leur domaine de définition.

Exercice 17. (★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\int_0^1 f(xt)\,dt.$$

Exercice 18. (★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce encore vrai si f est seulement supposée continue par morceaux ?

Exercice 19. (★) Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $[0\,;1]$.

Exercice 20. (★★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 21. (★★) Soit f continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 22. (★★) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Déterminer les domaines de définition et de continuité de la fonction $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23. (★★) Considérons $F : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\,du$.

1) Calculer $F(0)$. A l'aide d'un encadrement, montrer que F est continue en 0.
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $F(x)$ en fonction d'une intégrale dont seules les bornes dépendent éventuellement de x.
3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée.
4) Montrer que F est dérivable en 0.
   On pourra utiliser le fait (montré dans le TD4) que, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $1 - \dfrac{y^2}{3} \leqslant \dfrac{\sin(y)}{y} \leqslant 1$.

Exercice 24. (★★) Montrer que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ sans faire de calculs.

Exercice 25. (★★)

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $\varphi(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 1$.
2) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 26. (★) Soit $\alpha > 0$. Sans utiliser de sommes de Riemann, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}.$$

Exercice 27. (★★) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\},\qquad u_n=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k\ln k}\right)-\ln(\ln(n)).$$

1) Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$:

$$\frac{1}{(p+1)\ln(p+1)}\leqslant\int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leqslant\frac{1}{p\ln p}$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 28. (★★) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et telle que $f(a)=0$. Montrer que

$$\forall t\in[a\,;b]\,,\qquad \int_a^t f(u)\,du+\int_0^{f(t)}f^{-1}(u)\,du=tf(t).$$

Exercice 29 – Lemme de Gronwall. (★★) Soit $a\in I$. Soient $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:I\longrightarrow\mathbb{R}_+$ continues sur I. Soit $A\in\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x\in I$,

$$f(x)\leqslant A+\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) On définit les fonctions y et z sur I par

$$y:x\longmapsto A+\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad z:x\longmapsto y(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Déterminer les variations de z sur I.

2) Démontrer le lemme de Gronwall :

$$\forall x\in I,\qquad x\geqslant a\quad\Longrightarrow\quad f(x)\leqslant A\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

3) Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(0)=0$. On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\varphi'(x)\leqslant\alpha\varphi(x)$. Montrer que φ est la fonction nulle.

IV Sommes de Riemann

Exercice 30. Pour chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

1) (★) $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$,
2) (★) $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k^2+n^2}$,
3) (★) $u_n=\dfrac{1^x+2^x+\cdots+n^x}{n^{x+1}}$ avec $x\in\mathbb{R}_+^*$,
4) (★★) $u_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$,
5) (★★★) $u_n=\dfrac{1}{n^4}\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$
6) (★★★) $u_n=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\exp\left(\frac{k}{2n}\right)$.

Exercice 31. (★) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,dt$ à l'aide d'une somme de Riemann.

Exercice 32. (★) Soit $\varepsilon>0$. Déterminer $n\in\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$ est une approximation de $\dfrac{\pi}{4}$ à ε près.

Exercice 33. (★★) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 et on forme la quantité $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}A_1A_k$. Calculer la limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 34 – Inégalité de Jensen. (★★) Soit φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0\,;1]$. En utilisant les sommes de Riemann, montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 35 – Intégrale de Poisson. (★★★) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Posons $I(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x\cos(u) + 1)\,du$.

1) Montrer que l'intégrale $I(x)$ existe et que $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|x + \mathrm{e}^{iu}\right|\,du$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|x - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|$. Montrer que $I_n(x) = \ln|1 - x^n|$.
3) En déduire une expression de $I(x)$.

V Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux

Exercice 36. (★)

1) Soient $0 < a < b$ deux entiers naturels. Calculer $\displaystyle\int_a^b \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$.
3) (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{1/n}^{1} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$.

Exercice 37 – Lemme de Riemann Lebesgue. On a vu en cours que, lorsque f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et à valeurs complexes, on a

$$\int_a^b f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

1) Montrer que, cette limite reste vraie si f est, cette fois, une fonction en escalier sur $[a\,;b]$.
2) En déduire que cette limite est encore valable lorsque f est une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$.

Exercice 38. (★★) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour toute fonction $g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 39 – Fonctions Riemann intégrables. (★★) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons

$$\mathscr{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \,|\, \varphi \leqslant f\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}^+(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \,|\, f \leqslant \psi\}$$

puis

$$I^-(f) = \left\{\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \,|\, \varphi \in \mathscr{E}^-(f)\right\} \qquad \text{et} \qquad I^+(f) = \left\{\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \,|\, \psi \in \mathscr{E}^-(f)\right\}$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) sur $[a\,;b]$ si $I^-(f)$ et $I^+(f)$ ont respectivement une borne supérieure et une borne inférieure, et si celles-ci sont égales.

1) Montrer que, si f est continue par morceaux, alors f est Riemann-intégrable sur $[a\,;b]$ et que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup I^-(f) = \inf I^+(f).$$

2) Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable.

Exercice 40. (★★) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$