

Limites et continuité

I Limites

Exercice 1. (★) Étudier les (éventuelles) limites suivantes. On distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite.

- 1) $x \mapsto \frac{2}{4x - 3x^2 - 1}$ en 1.
- 2) $x \mapsto \sqrt{7-x} - \sqrt{3-x}$ en 0 et en $-\infty$.
- 3) $x \mapsto \frac{3x - \sqrt{x}}{x + 2\ln(x)}$ en $+\infty$.
- 4) $x \mapsto 2x^4 + x - 5 + \frac{\sqrt{4x^2 - 8x + 4}}{x - 1}$ en 1.
- 5) $x \mapsto x^3 e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
- 6) $x \mapsto x^x$ en 0^+ .
- 7) $x \mapsto \frac{3 - 5x}{x^2 \ln(x)}$ en 0^+ et en $+\infty$.
- 8) $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
- 9) $x \mapsto \frac{\sqrt{3} - 2 \cos(x)}{1 - 2 \sin(x)}$ en $\frac{\pi}{6}$.
- 10) $x \mapsto \frac{7 \sin(x) - \sin(5x)}{\sin(6x)}$ en 0.
- 11) $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin(x)}$ en 0.
- 12) $x \mapsto \ln(x) \ln(\ln(x))$ en 1^+ .
- 13) $x \mapsto \ln(\sin(x)) - \ln(x)$ en 0^+ .
- 14) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $+\infty$.
- 15) $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$.
- 16) $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$.
- 17) $x \mapsto \sin(x^2)$ en $+\infty$.
- 18) $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ en 0 et en $+\infty$.
- 19) $x \mapsto x^\alpha \left[\frac{1}{x}\right]$ en 0^+ , avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2. (★) Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x - \sqrt{x^2}$.

Exercice 3. (★) Notons exceptionnellement $\sin^1 = \sin$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^{n+1} = \sin \circ \sin^n$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n(x)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. (★) Les fonctions suivantes sont-elles continues sur \mathbb{R} tout entier? Si non, préciser les points de discontinuité.

$$f : x \mapsto \begin{cases} \ln(x-1) - \ln(\sqrt{x}-1) & \text{si } x > 1 \\ \ln(2) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}, \quad g : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x + e^{-1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

$$h : x \mapsto \begin{cases} \sin(x) \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{-3/2}(1 - \cos(2x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Exercice 5. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijective croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 6. (★★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique. Que dire de f si elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Exercice 7. (★★)

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ si et seulement si $f(\sin(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- 3) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f\left(\frac{1}{[1/x]}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$?

Exercice 8. (★★★) Soit $f : x \mapsto \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$.

- 1) Montrer que f est définie sur $I = [1; +\infty[$ et continue sur un ensemble que l'on précisera.
- 2) Montrer que f est continue à droite en tout point de I .
- 3) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que f admet une limite à gauche en p . Est-elle continue à gauche en p ?
- 4) a) Calculer la limite de la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 - $u_n = n$,
 - $u_n = n + \frac{1}{2}$,
 - $u_n = n + \frac{3}{\ln(n)}$.
- b) La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
- c) Soit $a \in [0; 1]$. Donner une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

II Continuité

Exercice 9. (★) Prolonger par continuité les fonctions (lorsque c'est possible) aux bornes finies de leurs ensembles de définition :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 4x - 5}{2\sqrt{x+5}}, \quad g : x \mapsto x^{1/\ln(x)}, \quad h : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2|x|}\right), \quad j : x \mapsto x - \frac{x}{|x|} \quad k : x \mapsto x - \ln(x-1).$$

Exercice 10. (★) Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est continue sur \mathbb{R} . En déduire la valeur de

$$\int_0^9 (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}) dx.$$

Exercice 11. (★★) Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ sur \mathbb{R}^* .

Exercice 12. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur une partie D comme dans le cours. Montrer que $x \mapsto \min\{f(x); g(x)\}$ et $x \mapsto \max\{f(x); g(x)\}$ sont continues sur D .

Exercice 13. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} . On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$. Montrer que $f \leq g$ sur tout \mathbb{R} . A-t-on $f < g$?

Exercice 14. (★) Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si B est dense dans A alors $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Contre-exemple sans l'hypothèse de continuité?

Exercice 15. (★★) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Construire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq g$.

Exercice 16. (★★) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , continue en 1 et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x-1)$. Soit y un réel quelconque. On définit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $y_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \frac{1+y_n}{2}$.

- 1) Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = f(y)$.
- 3) Caractériser la fonction f .

Exercice 17. (★★) Notons $\mathcal{A} = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, g(x^2) = g(x)\}$.

- 1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à \mathcal{A} .
- 2) Soit f une fonction de \mathcal{A} qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur \mathbb{R} .

Exercice 18 – Autour de la fonction de Dirichlet. (★★) La fonction de Dirichlet est la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de \mathbb{R} .

On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0 , il existe une suite de rationnels qui converge vers x_0 .

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) \right)$.

3) Étudier la continuité de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Exercice 19. (★★★) La fonction de Thomae est la fonction

$$T : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de } x. \end{cases}$$

1) Montrer que T est discontinue en tout rationnel.

2) a) Montrer que T est 1-périodique sur \mathbb{R} .

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A_\varepsilon = \{y \in [0; 1] \mid T(y) > \varepsilon\}$ est un ensemble fini.

c) En déduire que T est continue en tout irrationnel.

Exercice 20. (★★) Construire une bijection de $[0; 1]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Exercice 21. (★★★★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans \mathbb{N}).
On utilisera le fait que \mathbb{N} et \mathbb{Q} sont en bijection (cf. chapitre 15).

III Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 22. (★) Que dire d'une fonction f continue vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = f(x)$.

Exercice 23. (★) Un marathonien a parcouru une distance de 24km en deux heures. Montrer qu'il a parcouru exactement 12km durant un intervalle de temps d'une heure.

Exercice 24. (★) Soient f et g continues sur $[0; 1]$ telles que $\sup_{[0;1]} f = \sup_{[0;1]} g$. Montrer que les graphes de f et g se croisent.

Exercice 25. (★) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $\ell < 1$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 26. (★) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que toute application continue $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ admet un point fixe.

Exercice 27. (★) Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $[0; 1]$ soit inclus dans $f([0; 1])$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 28. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur \mathbb{R} . Montrer que f admet un unique point fixe. Est-ce que ce résultat est vrai si f est une fonction croissante ?

Exercice 29. (★★) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Exercice 30. (★★) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 31. (★★) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Soient $m = \min_{[a; b]} f$ et $M = \max_{[a; b]} f$ (pourquoi existent-ils?). On suppose que $m < M$. Soit $y \in]m; M[$. Montrer que y a au moins deux antécédents dans $[a; b]$.

Exercice 32. (★★★) Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide). Donner l'allure de son graphe.

Exercice 33. (★★) A l'aide de l'algorithme de dichotomie et de Python, déterminer une valeur approchée de π à 10^{-6} près en tant que solution sur $[0; 4]$ de l'équation $\cos(x/2) = 0$.

Exercice 34. (★★) A l'aide de l'algorithme de dichotomie et de Python, écrire une fonction qui prend en entrée un réel x et qui calcule une approximation de $\text{Arctan}(x)$ à 10^{-6} près.

Exercice 35. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n strictement positif tel que $1 + \sqrt{x_n} \ln(x_n) = n$. Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et étudier sa limite.

Exercice 36. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + \frac{1}{x^n} = 3$, d'inconnue $x \in]1; +\infty[$, admet une unique solution que l'on note x_n . Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

Exercice 37 – Une fonction implicite. (★★) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < p < n$.

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $t^n + xt^p = 1$. On note t_x cet unique réel.
- 2) Étudier les variations et les limites en $\pm\infty$ de la fonction $f : x \mapsto t_x$.

IV Théorème des bornes atteintes

Exercice 38. (★) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles. Supposons que f admette des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} .

Exercice 39. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que, pour tout $x \in [0; 1]$, $0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$, $C f(x) \leq g(x)$. Donner un contre-exemple si on ne suppose plus les fonctions définies sur un segment.

Exercice 40. (★) Montrer qu'une fonction périodique continue sur \mathbb{R} est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 41. (★★) Soit f une fonction continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[a; b]$. Montrer que

$$\sup_{x \in [a; b]} f(x) = \sup_{x \in]a; b[} f(x)$$

Exercice 42. (★★) Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \max_{0 \leq k \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 43. (★★) Existe-t-il

- Une bijection continue de $[0; 1]$ sur $]0; 1[$?
- Une surjection continue de $[0; 1]$ sur $]0; 1[$?
- Une surjection continue de $]0; 1[$ sur $[0; 1]$?
- Une bijection continue de $[0; 1]$ sur \mathbb{R} ?
- Une surjection continue de $[0; 1]$ sur \mathbb{R} ?
- Une surjection continue de \mathbb{R} sur $[0; 1]$?
- Une bijection continue de \mathbb{R} sur $]0; 1[$?
- Une surjection continue de \mathbb{R} sur $]0; 1[$?
- Une surjection continue de $]0; 1[$ sur \mathbb{R} ?
- Une bijection continue de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+ ?
- Une surjection continue de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+ ?
- Une surjection continue de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R} ?