Feuille d'exercices n° 1

Logique, ensembles et quantificateurs

Exercice 1. (★★) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. A l'aide de tables de vérité, montrer que :

1) $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.
2) $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$.
3) $(\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow \mathcal{B}$.
4) $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\text{non}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow \mathcal{B}$.

Exercice 2 – Connecteur de Sheffer. (★★) On définit un nouveau connecteur logique, noté $\uparrow$ (parfois appelé connecteur de Sheffer ou nand) par : pour toutes propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} \uparrow \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}).$$

1) Traduire en français le fait que $\mathcal{A} \uparrow \mathcal{B}$ est vraie.
2) Construire sans démonstration la table de vérité de $\uparrow$. La suite de l'exercice se fera sans table de vérité, mais en utilisant les propriétés du cours (dont les lois de Morgan).
3) Simplifier $\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}$ ainsi que $(\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}) \uparrow (\mathcal{B} \uparrow \mathcal{B})$.
4) En déduire une assertion équivalente à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne contenant que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et $\uparrow$ (éventuellement plusieurs fois). Par conséquent, toute assertion contenant les connecteurs non, ou, et peut être réécrite en utilisant uniquement le connecteur $\uparrow$. On dit qu'il forme un système complet.

Exercice 3. (★) Écrire la négation des phrases suivantes :

1) $x > 3 \implies f(x) \leqslant 5$.
2) $-4 \leqslant x < 2$.
3) $y < -3$ ou $y > 12$.
4) $a < b < c < d$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$.
6) Si $r \in \mathbb{Q}$, alors $r^2 \in \mathbb{Q}$.
7) $\forall x > 1, \exists k \in \mathbb{N}, x^k \geqslant 2025$.
8) $P(0)$ et $\big(\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1))\big)$.
9) $(x > -1 \text{ et } f(x) = 0) \text{ ou } (x \leqslant -1 \text{ et } g(x) = 0)$.
10) $\forall a \in A, \forall b \in A, (ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0))$.
11) Tous les élèves de moins de quinze ans ou de plus de dix-huit ans ont une note moyenne comprise entre 15 et 18.
12) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \big(x^n = y^n \text{ et } x \neq y\big)$.
13) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon)$.
14) (★★) $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
15) (★★) Il n'a plu qu'un seul jour cette semaine.
16) (★★) $\exists! z \in E, g(z) = 0$.

Exercice 4. (★) Écrire la contraposée des implications de l'exercice précédent.

Exercice 5. (★★) Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes et écrire leur négation :

1) L'entier 5 est impair.
2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) La suite $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4) L'équation $\ln(x) - x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
5) L'exponentielle de tout réel est strictement positive.
6) La fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine réelle.
7) La fonction $\sin$ s'annule exactement deux fois sur $[0\,;2\pi[$.
8) Tout complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. (★) Décrire les parties $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, P(x)\}$ de $\mathbb{R}$ quand $P(x)$ est la proposition :

1) $(x > 1 \text{ et } x < 2) \text{ ou } (x = 1)$.
2) $x > 1 \text{ et } x < 6 \text{ et } x \neq 3$.
3) $(x \leqslant 1 \text{ et } x > 2) \text{ ou } (x = -5)$.
4) $x \leqslant 1 \implies x \leqslant 0$.

Exercice 7. (★) Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :

1) L'ensemble des entiers naturels divisibles par 7.
2) L'ensemble des fractions d'entiers (relatifs) dont le dénominateur est une puissance de 3.
3) L'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés d'entiers.
4) L'ensemble des inverses d'entiers naturels (non nuls).
5) L'ensemble des carrés parfaits.

Exercice 8. (★) Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse et écrire sa négation et sa contraposée.

1) Si une somme de 2025 réels est nulle, alors ils sont tous nuls.
2) Si Mozart a composé *Le lac des cygnes*, alors $1 + 1 = 3$.
3) Si un élève ne connaît pas son cours en colle de Maths, alors il aura strictement moins de 10.

Exercice 9. (★) Montrer que les phrases « Ceux qui parlent ne savent pas » et « Ceux qui savent ne parlent pas » sont équivalentes.

Exercice 10. (★) Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant).

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ m \leqslant x^2 \leqslant M$.
2) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ m \leqslant x^2 \leqslant M$.
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ m \leqslant \sin(x) \leqslant M$.
4) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ m \leqslant \sin(x) \leqslant M$.
5) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, y < x$.
6) $\exists x \in [0\,;1]\,,\ \forall y \in [0\,;1]\,,\ x \leqslant y$.
7) $1 + 1 = 2 \ \Rightarrow\ 1 + 1 = 3$.
8) $1 + 1 = 3 \ \Rightarrow\ 1 + 1 = 2$.
9) $1 = 0 \ \Rightarrow\ \exists k \in \mathbb{N},\ 3 = 2k$.
10) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geqslant 3$.
11) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2\,,\ \left(x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}\right)$.
12) $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$.
13) $\exists! x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 0$.
14) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n + m$ soit impair.
15) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \times m$ soit impair.
16) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
17) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
18) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
19) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
20) $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2,\ \exists z \in \mathbb{N},\ \sqrt{z} > x + y$.
21) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ln(\ln(y)) > x$.
22) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x + y = 0 \ \Rightarrow\ x = y = 0\big)$.
23) Il existe f et g croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f - g$ soit la fonction nulle