Feuille d'exercices n° 21

Polynômes

I Degré, coefficient dominants, opérations sur $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1) $P = (X-1)^n - (X+7)^n$,
2) $P = (X+2)^n + (1-X)^n$,
3) $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}(X^k + X + 1)$,
4) $P = \displaystyle\prod_{m=1}^{n}(3X^2 + 2mX + 2026)$,
5) $P = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n}(64X^6 + 2026X^4 + \ell)^{\ell^2}$.

Exercice 2. (★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré n. Montrer que $Q = X^2P' - nXP \in \mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 3. (★★) Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

Exercice 4. (★★) Déterminer l'ensemble de polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.

Exercice 5. (★★) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathrm{j}X) = P(X)$, où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^3)$.

Exercice 6. (★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers positifs et de degré $n+1$ tel que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Exercice 7. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \left(X^2-1\right)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n \times n!} \times P_n^{(n)}$.

1) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2) En utilisant la formule de Leibniz, calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Exercice 8. (★★) Soient P et Q deux polynômes réels distincts de degré $n \geqslant 0$. Montrer que $\deg\left(P^3 - Q^3\right) \geqslant 2n$. Le résultat est-il encore valable sur $\mathbb{C}$?

II Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$

Exercice 9. (★) Effectuer à chaque fois la division euclidienne de A par B.

1) $A = 6X^6 - 3X^5 - 5X^2 + 10X - 6, B = 4X^3 + X - 1$.
2) $A = 7X^7 - 5X^5 + 3X^3 - X, B = 6X^6 - 4X^4 + 2X^2$.

Exercice 10. (★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de

1) $X^7 - 3X^5 - 5X^3 + 1$ par $X - 2$,
2) $(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1$ par $X^2 + 5X + 6$,
3) $X^n - 4X + 2$ par $X(X+\mathrm{i})(X-2)$,
4) $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$,
5) $(X-2)^{2n} + X - 3$ par $(X-1)^2$.

Exercice 11. (★) Montrer que, pour tout $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.

Exercice 12. (★★) Trouver les réels a tels que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. (★★) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
On commencera par montrer qu'il divise $P \circ P - P$.

Exercice 14. (★) Montrer que $X^5 - 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux. Déterminer une relation de Bézout entre ces polynômes.

Exercice 15. (★) Soient n, m deux entiers naturels non nuls et P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs n et m. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes A et B non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deg $A < m$ et deg $B < n$ tels que $AP = BQ$.

Exercice 16. (★★) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer les polynômes de degré n, divisibles par $X + 1$ et dont les restes dans la division euclidienne par $X + 2, \ldots, X + n + 1$ sont égaux.

Exercice 17. (★★) Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1$.
On commencera par remarquer que, si $n = pq + r$, alors $X^n - 1 = X^r \times (X^{qp} - 1) + X^r - 1$.

III Racines, rigidité

Exercice 18. (★) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ ayant exactement n racines réelles distinctes. Combien P' possède-il de racines réelles ?

Exercice 19. (★) Donner un polynôme P dont les coefficients ne sont pas tous des entiers et tel que $P(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $P(k) = k^n$.

Exercice 21. (★) Soient P, Q deux polynômes tels que pour tout réel x, $P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) = 0$. Montrer que P et Q sont nuls.

Exercice 22. (★) Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3$ tel que $Q \circ P = R \circ P$. Montrer que, si P n'est pas constant, alors $Q = R$.

Exercice 23. (★) Existe-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$?

Exercice 24. (★) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que la fonction polynomiale associée à P est monotone sur $[A\,; +\infty[$.

Exercice 25. (★★) Que dire d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^2\,P^2(t)\,dt$?

Exercice 26. (★★)

1) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$.
2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = \sqrt{k^2 + 1}$.
3) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = 2^k$.

Exercice 27. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P_n = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2 X - 2n^2 + 3n - 1$$

Exercice 28. (★) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$ et $P^{(n)}(2) = 0$ pour tout $n \geqslant 3$.

Exercice 29. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a), P'(a), \ldots, P^{(n)}(a)$ soient strictement positifs. Montrer que P ne s'annule pas sur $[a\,; +\infty[$.

Exercice 30. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $1 + X + X^n \in \mathbb{R}[X]$ n'a que des racines simples (s'il en a).

Exercice 31. ($\bigstar\bigstar$) Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux. Montrer que $(X^p-1)(X^q-1)$ divise $(X-1)(X^{pq}-1)$.

Exercice 32. ($\bigstar\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Montrer que le nombre de racines distinctes de P est égal à $\deg(P)-\deg(P \wedge P')$.

Exercice 33. ($\bigstar\bigstar$) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$ (cette somme étant finie).

Exercice 34. ($\bigstar\bigstar$) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X-2)P(X+1) = (X+1)P(X)$.

Exercice 35. ($\bigstar$) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\displaystyle\int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 36. ($\bigstar\bigstar$) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Déterminer tous les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P \circ P = P^k$.
On pourra utiliser, en le justifiant, que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré supérieur ou égal à 1, alors $P(\mathbb{R})$ est infini.

Exercice 37. ($\bigstar\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n tel que P' divise P.

1) Supposons qu'un tel P existe. Montrer alors qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, $P = \dfrac{1}{n}(X-\alpha)P'$.
2) Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P puis en déduire P. Conclure.
3) Recommencer l'exercice en déterminant cette fois la multiplicité de α.
   On utilisera encore la question 1 mais on ne déterminera pas de relation de récurrence.

Exercice 38. ($\bigstar\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer que le nombre de réels ε tels que $P+\varepsilon$ admette des racines multiples est inférieur ou égal à $n-1$. Illustrer par un dessin. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in \,]0\,;\alpha[$, $P+\varepsilon$ n'admette que des racines simples.

Exercice 39. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, $P(xy) = P(x)P(y)$.

Exercice 40 – Solution particulière des EDL du type $y''+ay'+by = P(x)\mathrm{e}^{mx}$. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a,b,c,m) \in \mathbb{K}^4$. Notons $R = X^2+aX+b$. Soit P un polynôme de degré n. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $x \longmapsto Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ est solution particulière de (E) : $y''+ay'+by = P(x)\mathrm{e}^{mx}$ et que

$$\deg(Q) = \begin{cases} n & \text{si } m \text{ n'est pas racine de } R, \\ n+1 & \text{si } m \text{ est racine simple de } R, \\ n+2 & \text{si } m \text{ est racine double de } R. \end{cases}$$

Exercice 41. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X+1)$. Justifier que toute racine de P est nulle ou bien une racine de l'unité.

IV Polynômes scindés, relations coefficients-racines

Exercice 42. ($\bigstar$) Donner la somme et le produit des racines complexes (comptées avec multiplicité) de $P = 2X^5+3X^4+2X^3+X^2+X+2026$.

Exercice 43. ($\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $\mu(P) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{P(z)=0} z$ la moyenne arithmétique des racines de P comptées avec multiplicité. Montrer que $\mu(P) = \mu(P')$ et donner leur valeur commune.

Exercice 44. ($\bigstar\bigstar$) Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y, z complexes :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Exercice 45. (★★) Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module inférieur ou égal à 1.

Exercice 46. (★★) Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. Notons $P = X^3 + pX + q$. Notons x, y, z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

1) Montrer que $P'(x)P'(y)P'(z) = 4p^3 + 27q^2$.
2) En déduire une CNS pour que P admette une racine multiple.

Exercice 47. (★★)

1) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est surjectif.
2) On cherche à présent tous les polynômes injectifs. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ injectif.
   a) Est-ce que P peut être constant ?
   b) Montrer que P a une unique racine complexe (éventuellement de multiplicité supérieure à 1) qu'on notera α. En déduire une expression de P sous forme factorisée.
   c) Montrer que si $\deg(P) \geqslant 2$, le coefficient dominant de P admet au moins deux antécédents.
   d) En déduire tous les polynômes injectifs.

Exercice 48. (★★) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé.

1) On suppose que les racines de P sont simples. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.
2) (★★★) Montrer que P' est scindé dans le cas général.
3) On vient donc de montrer que le polynôme dérivé d'un polynôme scindé (sur $\mathbb{R}$) est lui aussi scindé. Ce résultat est un grand classique. Voici trois exercices qui l'utilisent.
   a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que si α est une racine multiple de P' alors α est racine de P.
   b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que les racines (complexes) de $P^2 + \lambda^2$ sont simples.
   c) Montrer que $X^3 + 1$ n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. S'inspirer de cet exemple pour montrer qu'un polynôme réel scindé à racines simples ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 49. (★★) Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire à coefficients complexes. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $|z| \leqslant \max\left(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)$.

V Factorisation

Exercice 50 – Polynôme mystère. (★) On donnera la réponse sous forme factorisée dans chaque question.

1) Le polynôme P est degré 4 et vérifie $P(1) = P(2) = P'(2) = 0$, $P(0) = 4$ et $P(3) = 1$. Qui est-il ?
2) Le polynôme Q est de degré 2026, admet -3 pour racine d'ordre de multiplicité 795, 3 pour racine d'ordre de multiplicité 1230, 1 pour racine simple et son coefficient constant est 3^{2025}. Qui est-il ?
3) (★★) Le polynôme R est de degré 4 vérifie $R'(1) = R''(1) = R^{(3)}(1) = 0$, $R^{(4)}(1) = 12$ et $R(-1) = 0$. Qui est-il ?

Exercice 51. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 52. (★★)

1) Factoriser $-3X^4 - 2X^3 + 49X^2 - 76X + 20$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2) Factoriser $X^4 + X^3 - 18X^2 - 52X - 40$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
3) Factoriser $X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
4) Factoriser $2X^6 + 3X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 18X^2 - 5X$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
5) Factoriser $2X^5 - X^4 + 32X - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$, en remarquant d'abord que $1/2$ est racine.

Exercice 53. (★) Soit $P=(X+1)^7-X^7-1$. Montrer que j est racine de P et factoriser P sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 54. (★★) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$P=-2X^4+X^2+3, \qquad Q=X^4+5X^2+6, \qquad R=3X^4-17X^2+10 \qquad \text{et} \qquad S=4X^4-3X^2+1.$$

On se ramera à un trinôme du second degré ou on fera apparaître le début d'une identité remarquable.

Exercice 55. (★★) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^6+11X^4+59X^2+49$.

Exercice 56. (★★) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ le polynôme X^8+X^4+1.

Exercice 57. (★★) Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n}-2\cos(na)X^n+1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 58. (★★) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $k\in[\![1\,;n+1]\!]$, $P(k)=\dfrac{1}{k}$.
Calculer $P(n+2)$ à l'aide du polynôme $Q=XP(X)-1$.

Exercice 59. (★★) Soit $n\geqslant 1$. Calculer le produit

$$P=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}\right).$$

Exercice 60. (★★) Soit p un entier supérieur ou égal à 1.

1) Donner la factorisation du polynôme $X^{2p}-1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2) Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $1+X+\cdots+X^{2p-1}$. En déduire que

$$\sqrt{2p}=2^{p-\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{p-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2p}\right)$$

.

Exercice 61. (★★) Soient $n\geqslant 2$ un entier naturel. Posons $P_n=(X+1)^n-1$.

1) Justifier qu'il existe $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n=XQ_n$.
2) Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3) Calculer de deux façons différentes le coefficient constant de Q_n.
4) En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 62. (★★★) On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que si A et B sont deux polynômes qui sont sommes de deux carrés (de polynômes), il en est de même pour AB.
2) Montrer qu'un polynôme P est somme de deux carrés si et seulement s'il est positif, c'est-à-dire si et seulement si $P(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles.

VI Polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 63. (★) Expliciter (sous forme factorisée) l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la courbe représentative (dans un repère orthonormé) joint les points $(-1,10)$, $(0,8)$, $(1,0)$ et $(2,-8)$.

Exercice 64. (★★) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré n tel qu'il existe $a_1,\ldots,a_{n+1}$ rationnels tels que $P(a_i)\in\mathbb{Q}$ pour tout i $\in[\![1\,;n+1]\!]$. Montrer que P est à coefficients rationnels.

Exercice 65. (★★) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $P(x)$ soit réel. Montrer que $P\in\mathbb{R}[X]$.

VII Preuve du théorème de D'Alembert-Gauss

Exercice 66 – Théorème de D'Alembert-Gauss. (★★★) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ dont le degré est $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathscr{P} = \{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$.

1) a) Justifier que $\mathscr{P}$ admet une borne inférieure. On la note α.
   b) Justifier qu'il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^n$ tel que $|P(y_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

2) a) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = r$,

$$|P(z)| \geqslant |a_p|r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|r^k.$$

   b) En déduire que $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$.
   c) Montrer alors que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et conclure qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \alpha$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha \neq 0$. On pose alors $Q = \dfrac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$.
   a) Montrer que $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$.
   b) Justifier qu'il existe $q \in [\![1\,;p]\!]$ et des complexes $b_q, \dots, b_p$ tels que $b_q \neq 0$, $b_q \neq 0$ et

$$Q = 1 - b_q X^q + \sum_{k=q+1}^{p} b_k X^k$$

   (avec la convention que la somme est nulle si $q = p$).
   c) Notons $b_q = \rho e^{i\theta}$. Montrer qu'il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $r \in]0\,;r_0[$,

$$|Q(re^{-i\theta/q})| - 1 \leqslant -\rho z^q + \sum_{k=q+1}^{p} b_k z^k.$$

   d) Aboutir à une absurdité.

4) Conclure que P admet une racine complexe.