

Probabilités sur un univers fini

I Modélisation

Exercice 1. (★) On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C et D des événements. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :

- 1) « L'un au moins des événements A, B, C, D est réalisé ».
- 2) « Tous les événements A, B, C, D sont réalisés ».
- 3) « Aucun des événements A, B, C, D n'est réalisé ».
- 4) « B et C ne sont pas réalisés ».
- 5) « L'un des événements B et D et un seul est réalisé ».
- 6) « Si A est réalisé, alors B et D sont réalisés ou C n'est pas réalisé ».
- 7) « Exactement deux événements parmi A, B, C, D sont réalisés ».

Exercice 2. (★ à ★★) On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$ et $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$. On répète n fois une expérience dont l'issue qui peut être un succès ou un échec. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note A_j l'événement « la $j^{\text{ième}}$ expérience est un succès ».

- 1) En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :
 - a) « La $k^{\text{ième}}$ expérience est un échec ».
 - b) « Seule la $k^{\text{ième}}$ expérience est un échec ».
 - c) « Aucune des expériences n'est un succès ».
 - d) « Toutes les expériences à partir de la $k^{\text{ième}}$ sont des succès ».
 - e) « Seules les k dernières expériences sont des succès ».
 - f) « Toutes les expériences sauf une sont des succès ».
 - g) « Toutes les expériences sauf peut-être une sont des succès ».
 - h) « Le premier succès arrive au bout d'un nombre pair d'expériences »

On distinguera selon la parité de n .

- 2) Décrire à l'aide d'une phrase l'événement suivant :

$$\bigcup_{\substack{J \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ \text{card}(J)=k}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \bar{J}} \bar{A}_j \right).$$

II Calculs de probabilités en situation d'équiprobabilité

Exercice 3. (★) On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- 1) un double ?
- 2) une somme égale à 9 ?
- 3) un minimum des deux dés égal à 4 ?
- 4) au moins un 6 ?

Exercice 4. (★) Quelle est la probabilité que six dés équilibrés donnent chacun un chiffre différent ?

Exercice 5. (★) Une séquence d'ADN est une suite de quatre nucléotides dénotés A, C, G, T .

- 1) Si chaque nucléotide est équiprobable, quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 13 contenant exactement cinq A ?
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence avec $A, A, A, G, G, G, G, G, T, T, T, T, C$?

Exercice 6. (★) Soient m, r, k, n des entiers naturels tels que $1 \leq m \leq r < n$ et $1 \leq k \leq n$. Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces destinées à des assemblages. Pour contrôler la qualité d'un lot de taille n , elle échantillonne r pièces. En supposant que le lot contienne k pièces défectueuses, quelle est la probabilité de trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ?

Exercice 7 – Le problème du chevalier de Méré. (★) En 1654, le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres posa le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal : « Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? ». Étudier ce problème.

Exercice 8 – Un autre problème des anniversaires. (★★) On a vu en cours que, dans une classe de 23 élèves¹, il y avait plus d'une chance sur deux qu'au moins deux élèves soient nés le même jour. Cette fois, de combien d'élèves la classe doit-elle être composée pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'au moins un autre élève partage VOTRE date de naissance ?

Exercice 9. (★★) Soit N un nombre entier à au plus 100 chiffres choisi au hasard. Quelle est la probabilité que N^3 se termine par 11 ?

Exercice 10. (★★★) A la fin de l'année, un professeur fait passer tous les élèves les uns après les autres, et fait tirer sans remise dans une boîte une question de cours parmi toutes celles de l'année, disons 200. Un élève a fait l'impasse sur 40 questions de cours. Le professeur laisse les élèves décider de l'ordre de passage. Est-il plus avantageux pour cet élève de passer premier, deuxième, ..., dernier ?

III Calculs de probabilités sans équiprobabilité

Exercice 11. (★) On jette un dé truqué dont les probabilités d'occurrence de 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{1}{12}, \quad p_4 = \frac{1}{6}, \quad p_5 = \frac{1}{6}, \quad p_6 = \frac{1}{3}.$$

- 1) Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience aléatoire.
- 2) Décrire chacun des événements suivants comme des parties de Ω et calculer leurs probabilités :
 - a) « Le chiffre est impair ».
 - b) « Le chiffre est supérieur à 2 ».
 - c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
 - d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Exercice 12. (★) On a truqué un dé à six faces numérotées de 1 à 6 de sorte que les nombres pairs aient tous la même probabilité, les multiples de 3 aient tous la même probabilité, les nombres premiers aient tous la même probabilité et que 1 sorte avec la probabilité $1/5$. Donner la probabilité de chaque face.

Exercice 13. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Posons $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket$. Soit \mathbb{P} une fonction définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k \binom{n}{k}$. A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction \mathbb{P} définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

Exercice 14. (★★) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux réels x et y pour qu'il existe une probabilité \mathbb{P} sur $\Omega = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ vérifiant $\mathbb{P}(\{1; 2\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{2; 3\}) = y$.

Exercice 15. On lance deux dés et on cherche la probabilité d'avoir une paire.

- 1) (★) Montrer que si les deux dés sont équilibrés, la probabilité recherchée vaut $1/6$.
- 2) (★★) Montrer que si les deux dés sont truqués de la même façon, la probabilité recherchée est supérieure ou égale à $1/6$.

IV Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 16. (★) On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A , B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α , β et γ . On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série ?
- lorsque les composants sont montés en parallèle ?
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle ?

Exercice 17 – Probabilité à paramètre. (★) On pose

$$p_1 = \alpha, \quad p_2 = p_3 = p_4 = \frac{7 - 16\alpha}{24}, \quad p_5 = p_6 = p_7 = \frac{1 + 8\alpha}{24}, \quad p_8 = \frac{1}{8}.$$

où $\alpha \in [0; \frac{7}{16}]$. Considérons $\Omega = \llbracket 1; 8 \rrbracket$. On définit sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ la probabilité \mathbb{P} par, pour tout $k \in \Omega$, $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$. On introduit enfin les trois événements $A = \{2; 5; 7; 8\}$, $B = \{3; 5; 6; 8\}$ et $C = \{4; 6; 7; 8\}$. Étudier l'indépendance mutuelle éventuelle des événements A, B, C en fonction de α .

Exercice 18. (★) On dispose de deux urnes U et V . L'urne U contient 3 boules rouges, 7 boules bleues et 2 boules jaunes. L'urne V contient 2 boules rouges, 5 boules bleues et 1 boule jaune. On considère l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de l'urne U et, sans la regarder, on la place dans l'urne V . On tire alors une boule dans V et on regarde sa couleur.

- 1) a) Calculer les probabilités respectives de piocher une boule rouge, bleue et jaune.
b) On a tiré une boule bleue dans l'urne V . Quelle est la probabilité d'avoir pioché aussi une boule bleue dans l'urne U ?
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise n fois cette expérience dans les mêmes conditions et indépendamment. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule rouge dans l'urne V pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ tirage ?

Exercice 19. (★★) On considère trois urnes : l'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges., l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges et l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges. On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et on les met dans U_3 . On tire une boule dans U_3 : elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 20. (★★) Une loterie a lieu chaque semaine. Il y a 100 billets dont 3 sont gagnants. Vaut-il mieux acheter 5 billets en une seule semaine, ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

Exercice 21. (★★) On dispose d'une urne avec $2n$ boules, n blanches et n noires. Soit $k \geq 1$.

- 1) On suppose que les tirages se font avec remise.
 - a) Donner la probabilité que les k premières boules soient blanches.
 - b) Donner la probabilité que la k -ième boule soit blanche, sachant que les $k - 1$ premières boules tirées sont blanches.
- 2) Mêmes questions si on suppose que les tirages se font sans remise.

Exercice 22. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $2n + 1$ urnes. Pour tout $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$, l'urne k possède k boules bleues, $2n - k$ boules jaunes et n boules rouges. On considère l'expérience suivante : on choisit au hasard une urne (sans savoir son numéro) qui n'est pas la $n^{\text{ième}}$, on tire une boule dans cette urne et (sans la regarder) on la place dans l'urne n . On tire alors une boule dans l'urne n et on regarde sa couleur. Calculer les probabilités respectives de piocher une boule rouge, bleue et jaune dans la $n^{\text{ième}}$ urne.

Exercice 23. On lance n dés équilibrés.

- 1) (★) Donner la probabilité que le produit des numéros obtenus soit pair.
- 2) (★★) Donner la probabilité que la somme des numéros obtenus soit pair.

Exercice 24. (★) Catherine a un garçon atteint de dystrophie musculaire de Duchenne (DMD). Il s'agit d'une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont conductrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50 % de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation. Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas. Le test de Catherine est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Exercice 25 – Le problème de Monty Hall. (★★) Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

Exercice 26 – Paradoxe des deux enfants. (★★) David a deux enfants (*on suppose que les enfants ne sont pas nés en même temps, que le sexe du premier enfant est indépendant de celui du deuxième et que chaque enfant est un garçon avec probabilité 1/2 et une fille avec probabilité 1/2*).

- 1) L'aînée est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?
- 2) L'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?
- 3) On demande à David d'indiquer le sexe de l'un de des enfants et il répond qu'il a une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?
- 4) (★★★) L'un des enfants est une fille née un jeudi (*on suppose que la probabilité qu'un enfant soit né un jour donné dans la semaine est 1/7*). Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?

Exercice 27. (★★) Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha \in]0; 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ième}}$ jour. On suppose que $p_0 = 1$.

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α .
- 2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n , α et p_0 .
- 3) Déterminer la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, donnez-en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Exercice 28. (★★) Une mouche entre dans un studio de deux pièces (une chambre et une salle de bain). Elle se trouve initialement dans la salle de bain. On relève sa position dans le studio toutes les minutes.

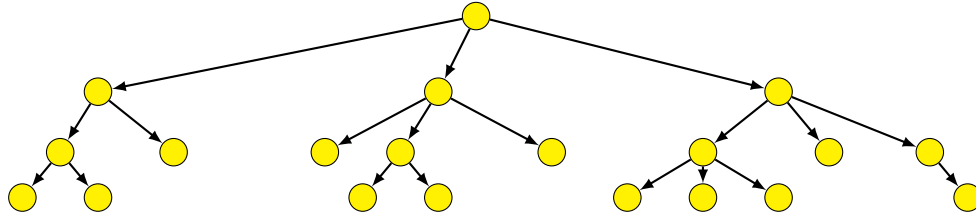
- Si elle est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, elle y reste avec probabilité 1/3 ou elle va dans la chambre avec probabilité 2/3.
- Si elle est dans la chambre à la $n^{\text{ième}}$ minute, elle y reste avec probabilité 1/2, elle va dans la salle de bain avec probabilité 1/4 ou elle sort par la fenêtre avec probabilité 1/4 pour ne plus jamais revenir.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a_n (respectivement b_n et c_n) les probabilités respectives que la mouche soit dehors (respectivement dans la salle de bain et dans la chambre).

- 1) Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1 .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de b_n et c_n .
- 3) Étudier les suites $(2b_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(4b_n + 3c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 4) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n, c_n et b_n en fonction de n .
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, quelle est la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente ?
- 6) Combien de minutes sont-elles nécessaires pour que la probabilité que la mouche soit dehors soit supérieure à 95% ?

Exercice 29. (★★) Soient $N \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $p \in]0; 1[$. Un nombre N de personnes numérotées $1, 2, \dots, N$ se transmettent dans cet ordre une information reçue correcte par la première personne. Chaque personne transmet l'information qu'il entend avec probabilité p et la transforme en son contraire avec probabilité $1 - p$. Quelle est la probabilité que la $N^{\text{ième}}$ personne reçoive l'information correcte ?

Exercice 30 – Processus de Bienaymé-Galton-Watson dans un cas simple. (★★★) On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $1/8$, 2 descendants avec la probabilité $3/8$, 1 descendant avec la probabilité $3/8$ et aucun descendant avec la probabilité $1/8$, indépendamment de ses congénères. À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = 1/8$.



- 1) Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
- 2) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n -ième génération. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = \frac{1}{8} \times x_n^3 + \frac{3}{8} \times x_n^2 + \frac{3}{8} \times x_n + \frac{1}{8}$$

- 3) Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers une limite que l'on explicitera. Interpréter ce résultat.

V Exercices plus abstraits

On se donne $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilité fini.

Exercice 31. (★)

- 1) Que dire sur deux événements A et B qui sont à la fois incompatibles et indépendants ?
- 2) Montrer que, si A est un événement de probabilité 0 ou 1, alors A est indépendant de tout événement.

Exercice 32. (★) Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A > 0)$. Prouver que $\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B) \leq \mathbb{P}_A(A \cap B)$.

Exercice 33. (★) Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On dit que A exerce une influence positive sur B si $\mathbb{P}_A(B) \geq \mathbb{P}(B)$. Montrer que A exerce une influence positive sur B si et seulement si B exerce une influence positive sur A .

Exercice 34. (★★) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Soient A_1, \dots, A_n des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun de ces événements ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)$.

Exercice 35 – Inégalité de Bonferroni. (★★) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Soient A_1, \dots, A_n des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

Exercice 36. (★★) On considère Ω fini de cardinal $n \geq 2$, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que Ω contienne deux événements indépendants non triviaux (c'est-à-dire de probabilité appartenant à $]0; 1[$).

Exercice 37. (★★★) Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \times \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) \times \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$