Feuille d'exercices n° 2

Raisonnements usuels

Exercice 1. (★) Montrer les propositions suivantes par l'absurde ou par contraposée :

1) Si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).*
2) Soit n un entier naturel. Montrer que, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, si x et y sont deux réels tels que $x + y > \varepsilon$, alors $x > \dfrac{\varepsilon}{2}$ ou $y > \dfrac{\varepsilon}{2}$.
4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'implication : $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \ \Rightarrow\ a \leqslant b$.
5) Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 2. (★★) On admet que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (nous le montrerons dans le chapitre 12).

1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$.
2) Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.

Exercice 3. (★) Combien un village doit-il compter d'habitants pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 4. (★★) Parmi 51 entiers distincts compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours au moins deux consécutifs.

Exercice 5. (★★) Montrer que, tous les matins, il existe deux élèves qui serrent le même nombre de mains (tous les élèves ne se disent pas bonjour et tous ne se serrent pas la main non plus).

On pourra utiliser le principe des tiroirs avec pour « chaussettes » les nombres $a_1, \dots, a_n$ de mains serrées par les élèves (en numérotant les élèves de 1 à n et en notant, pour tout k compris entre 1 et n, a_k le nombre de mains serrées par l'élève k).

Exercice 6. (★★) Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 7. (★★) A l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 8. (★) Où est l'erreur dans le raisonnement suivant :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $n = n^2$ ».
- $0 = 0^2$ et $1 = 1^2$ donc H_0 et H_1 sont vraies.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $n = n^2$ donc, en multipliant par n, il vient $n^2 = n^3$ donc $n = n^3$, si bien que $n - 1 = n^3 - 1 = (n-1) \times (n^2 + n + 1)$. En divisant par $n - 1$ (non nul car $n \geqslant 2$), on obtient $1 = n^2 + n + 1$ et, enfin, $n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 – Inégalité de Bernoulli. (★) Montrer que

$$\forall x \in [-1\,;+\infty[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 10. (★) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $2^n > n^2$.

Exercice 11. (★) Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 12. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $a_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 13. (★★) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

Exercice 14. (★★) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenant n réels distincts. En raisonnant par récurrence, montrer que l'ensemble $B = \{x + y \,|\, (x, y) \in A^2\}$ contient au moins $2n - 1$ éléments distincts.

Exercice 15. (★★★) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme une somme de puissances de 2 distinctes.