Feuille d'exercices n° 14

Suites numériques

I D'une relation de récurrence à une expression explicite

Exercice 1. (★) Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression explicite du terme général.

1) $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{e}^2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = \pi \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5} \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = \dfrac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+1} \end{cases}$

7) $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \times u_n^2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$

9) $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^4}{u_n^3} \end{cases}$

10) $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

11) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2},\ u_1 = \dfrac{\mathrm{e}}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n \end{cases}$

12) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{n+1}{1-2n}\, u_n \end{cases}$

Exercice 2. (★) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n.$$

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3) En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{5u_n + 7}.$$

On suppose que u_0 est tel que la suite est bien définie. Posons $f : x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{5}\right\} \longmapsto \dfrac{4x+2}{5x+7}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions ℓ et ℓ' (avec $\ell < \ell'$).
2) On suppose désormais que $u_0 \neq \ell$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{u_n - \ell'}{u_n - \ell}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 – D'après ESCP. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

1) Déterminer α pour que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = \alpha n(-1)^n$, vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - s_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire son terme général (que l'on exprimera en fonction de v_0 et v_1).
3) En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : démonstration. (★) Prouver par récurrence le théorème donnant l'expression explicite du terme général d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (dans le cas complexe).

Exercice 6 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : une autre preuve. (★★) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Posons $\Delta = a^2 + 4b$.

1) a) Soit r une solution de l'équation $x^2 = ax + b$. Justifier que $r \neq 0$.
   b) Que dire de $\dfrac{-b}{r}$?
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{r^n}$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique donc on précisera la raison.
   b) A l'aide d'une somme télescopique, en déduire une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   On distinguera deux cas selon que $b + r^2$ est nul ou non.
   c) En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ selon que $\Delta \neq 0$ ou $\Delta = 0$.

II Limites de suites explicites

Exercice 7. (★ à ★★) Étudier la nature des suites de termes généraux suivants et préciser leur éventuelle limite.

1) e^{n^α}, $\alpha > 0$,
2) e^{1/n^α}, $\alpha > 0$,
3) $n^{1+\sqrt{n}}$,
4) $\dfrac{(-3)^n}{n^2}$,
5) $\dfrac{e^{-n^2}}{n^3}$,
6) $\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{5}{n}\right)^n$,
7) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$,
8) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$,
9) $n\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
10) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
11) $\dfrac{\ln(n^3)}{n\sqrt{n}}$,
12) $2^{2n} - \sqrt{n}3^n$.
13) $\dfrac{8^n}{e^{3n}}$,
14) $2^{2n}e^{-3n}$,
15) $\dfrac{3^n - n^2e^n}{3^n + n^2e^n}$,
16) $\dfrac{\sin(n^n e^{n^3})}{n^{3/2}}$,
17) $\cos(\pi n)$,
18) $\sin(\pi 4^n)$,
19) $\dfrac{1}{n}\ln(n + e^{-2023n})$,
20) $\dfrac{(-1)^{n^2} + (n+1)^2 + \cos(1-n)}{4n^2 + \sin(\sqrt{n}) + 10n\ln(n)}$,
21) $\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 - n + 1}$,
22) $\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}}$,
23) $-n^3 + \sqrt{n^6 + \sin(2023^n)}$,
24) $\dfrac{\lfloor (2n-1)^3 \rfloor}{\lfloor (6n+7)^3 \rfloor}$,
25) $\sqrt[n]{n}$

Exercice 8. (★★) Soient $q \in]0\,;+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{q^n + n^\alpha}{1 + \big(\ln(n)\big)^\beta}$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de q, α et β.

Exercice 9 – Les suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite. (★)

1) Supposons que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
   a) À l'aide de la formule d'addition pour $\sin(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ_2 que l'on exprimera en fonction de ℓ_1.
   b) A l'aide d'un système linéaire vérifié par ℓ_1 et ℓ_2, aboutir à une absurdité.
2) En déduire que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. Conclure que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite non plus.

Exercice 10. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0.7$, $u_2 = 0.77$, $u_3 = 0.777$, $u_4 = 0.7777$... et de manière générale

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 0.\underbrace{777777\cdots777}_{n \text{ fois}}.$$

Montrer que la suite converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 11. (★★) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 12. (★) Déterminer les limites des suites de termes généraux :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

On utilisera le fait (que l'on redémontrera) que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 13. (★) Montrer que les suites de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$$

convergent vers une même limite.

Exercice 14 – Formule de Viète. (★★)

1) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de duplication de $\sin$, simplifier le produit suivant :
   $$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
   b) Donner la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
   On utilisera le taux d'accroissement de $\sin$ en 0.
2) On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$
   où il y a n radicaux. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
3) En utilisant la première question, montrer la formule de Viète :
   $$\prod_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 15. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée la série harmonique.

1) Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant c$.
2) Déterminer la nature de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Exercice 16. (★★★) Montrer que $\frac{1}{n!} \times \sum_{k=0}^{n} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

III Étude de suites récurrentes

Exercice 17. (★★) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $a_{n+2} \leqslant \frac{a_{n+1}+a_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 18. (★★) Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 < b_0$. Nous définissons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 < a_n < b_n$.
2) Montrer que la suite $(2^n(b_n - a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

La limite commune de ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0.

Exercice 19. (★★★) Étudier la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Les exercices suivants de ce paragraphe sont des études de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 20. (★) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial strictement positif et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

Exercice 21. (★) Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial positif et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = a + \sqrt{u_n}.$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on précisera, tel que $a + \sqrt{x_0} = x_0$.
2) On suppose que $u_0 > x_0$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > x_0$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
3) Recommencer la question précédente dans le cas où $u_0 < x_0$.

Exercice 22. (★★) Étudier la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_0 < 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{w_n + 1}{\sqrt{w_n^2 + 1}} - 1.$$

Exercice 23. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3)^2.$$

Exercice 24. (★★) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme initial positif et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n^2}.$$

Exercice 25. (★★) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [0\,;1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sin(2u_n).$$

On pourra montrer, le moment venu, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,;1\right]$.

Exercice 26. (★★) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

IV Étude de suites implicites

Exercice 27. (★★) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$P_n : x \longmapsto -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note x_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2) Calculer x_1 et x_2.
3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(x_n) > 0$.
   b) En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et que, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n < 1$.
4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n > \dfrac{1}{2}$.
5) Montrer enfin que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 28. (★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\ln(x) = -nx$ admet une unique solution que l'on note x_n.
2) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et celle de $(nx_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

V Utilisation de la définition quantifiée

Exercice 29. (★) En revenant à la définition d'une limite, donner la limite des suites de terme général :

1) $\dfrac{n}{n^2+1}$, 2) $\sqrt{n^2-n}$, 3) $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4}$, 4) $\dfrac{n^4-1}{n^3+2n+1}$, 5) $\dfrac{\sqrt{n+\sin(n)}}{n^2-n}$.

Exercice 30. (★) Soient a et b des réels. Soient (u_n) et (v_n) deux suites majorées respectivement par a et b. On suppose que $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a + b$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

Exercice 31. (★★) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers des réels ℓ et ℓ' respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $m_n = \max\{u_n ; v_n\}$ et $w_n = \min\{u_n ; v_n\}$. En utilisant la définition quantifiée, montrer que $m_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \max\{\ell ; \ell'\}$ et que $w_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \min\{\ell ; \ell'\}$.
Proposer ensuite une autre preuve utilisant la composition par une fonction continue.

Exercice 32 – D'après X MP 2012. (★★) Une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est dite C-convergente si la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

est convergente, et la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est appelée C-limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$. Le théorème de Cesàro (cf. exercice 33) nous dit donc qu'une suite convergente est C-convergente et que la limite de $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est égale à sa C-limite.

1) Donner un exemple de suite C-convergente non convergente.
2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est C-convergente alors $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
3) Montrer que pour tout $\alpha \in \,]0\,;1[$, la suite de terme général $a_n = (-1)^n n^\alpha$ est C-convergente.

Exercice 33 – Théorème de Cesàro. (★★) Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

Exercice 34 – Applications du théorème de Cesàro. (★★)

1) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2) En déduire les limites des suites de terme général : $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\sqrt[n]{\binom{n}{p}}$, $p \in \mathbb{N}$.

VI Exercices plus théoriques sur les suites

Exercice 35. (★) Montrer qu'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 36 – Monotonie des moyennes d'une suite monotone. (★) Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

est monotone de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 37 – Règle de d'Alembert faible. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs non nulles. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$.

1) Montrer que, si $k < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) Montrer que, si $k > 1$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3) Montrer qu'on ne peut pas conclure dans le cas $k = 1$.

Exercice 38. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1) Si $\ell < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) Si $\ell > 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3) Montrer qu'on ne peut rien dire si $\ell = 1$. Plus précisément, exhiber trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) de limite 1 telles que
   - $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2024$
   - $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
   - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ait pas de limite.

Exercice 39. (★★) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 40. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Que peut-on dire de la convergence éventuelle de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $\ell = \pm\infty$? $\ell \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$? $\ell \in \mathbb{Z}$?

VII Bornes supérieures/inférieures et limites

Exercice 41. (★★) Déterminer, lorsqu'elles existent, les bornes supérieures et inférieures des onze parties de $\mathbb{R}$ de l'exercice 25 du TD n° 3 et des suivantes :

12) $\left\{ \dfrac{p}{n+p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$, 13) $\left\{ \dfrac{n+\sqrt{p}}{\sqrt{n}+p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$, 14) $\left\{ \dfrac{1}{n-p} \;\middle|\; (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \; n \neq p \right\}$.

Exercice 42. (★★★) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et soit $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite.

1) Montrer que si u converge, alors U est bornée et admet un plus petit ou un plus grand élément.
2) Donner un exemple de suite u convergente pour laquelle U admet un plus petit et pas de plus grand élément, puis un exemple où il y a un plus grand mais pas de plus petit élément.
3) Donner enfin un exemple de suite bornée pour laquelle U n'a ni plus grand, ni plus petit élément.

VIII Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 43. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 44. (★) Pour tout $n \geqslant 2$, notons $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2\pi}{3}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exercice 45. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons u_n l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ n'admet pas de limite.

Exercice 46. (★)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que, si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Donner un exemple d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente telle que, pour tout $p \geqslant 2$, la suite $(u_{p\times n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 47. (★) Que peut-on dire d'une suite croissante qui admet une sous-suite convergente ? qui admet une sous-suite majorée ?

Exercice 48. (★) Montrer qu'une suite périodique non constante diverge. Peut-elle tendre vers $\pm\infty$?

Exercice 49. (★★) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée. Montrer qu'on peut en extraire une suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 50. (★★) Montrer qu'une suite d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$ admet une sous-suite constante.

Exercice 51. (★★★) Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telle que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel. Montrer que $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.

Exercice 52. (★★★) Montrer que toute suite réelle admet une sous-suite monotone. Redémontrer alors le théorème de Bolzano-Weierstrass (version réelle).

On dit que l'indice $n_0 \in \mathbb{N}$ est un pic d'une une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < u_{n_0}$. On distinguera les cas selon qu'il y a une nombre fini de pics ou non.

*Les prochains exercices utilisent la notion de **valeur d'adhérence** : on dit qu'un **réel** a est une valeur d'adhérence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si a est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette notion n'est au programme que de deuxième année mais déjà totalement accessible dès qu'on parle de limite d'une suite extraite. Le théorème de Bolzano-Weierstrass se reformule alors ainsi : toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.*

Exercice 53. (★) Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 54. (★★) Montrer qu'une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence converge. Montrer que ce résultat est faux si on en enlève l'hypothèse « bornée » ?

Exercice 55. (★★★) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathrm{e}^{u_n} + \mathrm{e}^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. En utilisant des exercices 49 et 54, montrer que u et v tendent vers 0.

Exercice 56 – Suites de Cauchy. (★★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que cette suite est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geqslant n_0, \qquad \forall p \geqslant n_0, \qquad |u_p - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

1) a) Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
   b) Redémontrer la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$.
2) On souhaite à présent montrer la réciproque : on suppose donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers un réel ℓ.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.