

# Trigonométrie

## I Formules de trigonométrie et équations trigonométriques

**Exercice 1.** (★) Donner une valeur de

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

**Exercice 2.** (★★) Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

- |   |  |
|---|--|
| 1) $2 \cos(4x + \pi) = 1,$                    | 5) $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x),$          |
| 2) $\cos(3x) - \sin(x) = 0,$                  | 6) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{2}.$ |
| 3) $\sin(2x) + \sin(6x) = 0,$                 | 7) $2 \sin(x) \leq -1.$                      |
| 4) $\sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{3} \sin(5x),$ | 8) $\sin^2(x) + 3 \cos(x) < 1.$              |

Pour les questions 7 et 8, on pourra s'aider d'un dessin. Mais, pour justifier correctement, on se ramènera à des cas de positivité de cosinus ou sinus.

**Exercice 3.** (★★) Résoudre l'équation  $2^{4 \cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4 \sin^2(x)-3} = 20$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** (★★) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Résoudre l'équation  $a \cos(x) + b \sin(x) = c$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 5.** (★★) Résoudre l'équation  $2 \sin(x) + 3 \cos(x) = 1$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 6.** (★) Soient  $n \geq 2$  et  $x \notin \pi\mathbb{Z}$ . Montrer que  $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$ .

**Exercice 7.** (★★) Donner la valeur de  $\alpha = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$ .

## II Fonctions circulaires et leurs réciproques

**Exercice 8.** (★) Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions  $x \mapsto 1 + \sin(2x)$  et  $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

**Exercice 9.** (★ à ★★) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression de la dérivée).

- |  |   |
|--|---|
| 1) $x \mapsto (1 + x^2)e^{\text{Arctan}(x)},$          | 8) $x \mapsto \text{Arccos}\left(4x^2 - \frac{3}{x^2}\right),$            |
| 2) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\text{Arcsin}(x)}},$      | 9) $x \mapsto \sqrt[5]{x}e^{\sin(\ln(x))},$                               |
| 3) $x \mapsto \cos(\sin^2(x)),$                        | 10) $x \mapsto \text{Arctan}(\text{Arctan}(\text{Arctan}(x))),$           |
| 4) $x \mapsto \ln(1 + \cos(\pi x^2)),$                 | 11) $x \mapsto (\cos(x))^{\sin(x)},$                                      |
| 5) $x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)},$                      | 12) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + 2)^4},$                          |
| 6) $x \mapsto \ln(\cos(x) - 1),$                       | 13) $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2}{\pi} \text{Arccos}(x)\right),$ |
| 7) $x \mapsto \frac{\ln(2 + \cos(x))}{\exp(\tan(x))},$ | 14) $x \mapsto \sqrt{3 \cos(x) + 4 \sin(x)}.$                             |

On ne cherchera pas à déterminer la dérivabilité en un point du domaine de définition où les théorèmes généraux d'opérations n'ont pas permis de conclure (on réserve cela pour le TD n° 19).

**Exercice 10.** (★) Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

$$\begin{array}{llll}
 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2) e^{-x}, & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - \cos(x)}, & 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \operatorname{Arctan}(x)}, & 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{x}, \\
 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin(x))x, & 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin(x)}{(x + 1)^2}, & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}, & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arccos}(x)}{x},
 \end{array}$$

**Exercice 11.** (★ à ★★) Étudier (domaine de définition, variations, limites, éventuelles asymptotes, branches paraboliques, convexité, courbes) les fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 1) x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & 3) x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x^2 + x + 2}\right), & 5) x \mapsto \operatorname{Arctan}(x^2 \ln(x)), \\
 2) x \mapsto x \operatorname{Arccos}(x), & 4) x \mapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^3), & 6) x \mapsto \operatorname{Arccos}(x) \operatorname{Arcsin}(x).
 \end{array}$$

**Exercice 12.** (★) Montrer que chacune des fonctions suivantes est périodique sur son domaine de définition.

$$\begin{array}{lll}
 1) x \mapsto \sin(7 + 6x), & 2) x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, & 3) x \mapsto \cos\left(\frac{2x}{43}\right) + \sin\left(\frac{2x}{47}\right).
 \end{array}$$

**Exercice 13.** (★★★) Déterminer deux fonctions périodiques dont la somme n'est pas périodique.

**Exercice 14.** (★★) Montrer que :

$$\begin{array}{l}
 1) \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \\
 2) \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.
 \end{array}$$

**Exercice 15.** (★★) Sans utiliser d'arguments de convexité, montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}.$$

**Exercice 16.** (★★)

- 1) Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$  réalise une bijection de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
- 2) Étudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  et exprimer sa dérivée.

**Exercice 17.** (★★) Donner le nombre de solutions de l'équation  $\sin(x) = \ln(x)$ .

**Exercice 18.** (★) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , simplifier  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ .

**Exercice 19.** (★) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(x)$ .

**Exercice 20.** (★★) Calculer  $\operatorname{Arctan}(\tan(x))$ ,  $\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$  et  $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$  pour tout réel  $x$ .

**Exercice 21.** (★★) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Simplifier (quand elles ont un sens) les expressions suivantes :

$$f(x) = \tan(2 \operatorname{Arctan}(x)), \quad g(x) = \cos(4 \operatorname{Arctan}(x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \sin(3 \operatorname{Arctan}(x)).$$

**Exercice 22.** (★★) Soit  $x \in [0; 1]$ . Simplifier l'expression  $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ .

**Exercice 23.** (★★) Montrer les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l}
 1) \operatorname{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{\pi}{2}. \\
 2) \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) = \pi.
 \end{array}$$

**Exercice 24. (★★)** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1)  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$ .

2)  $\sin(2 \text{Arccos}(2 \text{Arctan}(x))) = 0$ .

**Exercice 25. (★★)**

1) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2) Soient  $x$  et  $y$  des réels tels que  $xy \neq 1$ . Montrer que

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi,$$

où  $k = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1, x > 0, y > 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1, x < 0, y < 0 \end{cases}$ .

3) Montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

**Exercice 26. (★★)** Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\text{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**Exercice 27. (★★)** On introduit les fonctions

$$f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \quad \text{et} \quad g : x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \mapsto \tan(x).$$

- 1) Préciser l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . Prolonger  $f$  aux éventuelles bornes finies de  $D_f$  afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
- 2) Expliciter l'application  $f \circ g$ . En déduire  $f(x)$  en fonction de  $\text{Arctan}(x)$  pour tout  $x \in D_f$ .
- 3) Représenter graphiquement l'application  $f$  dans un repère orthonormé.

**Exercice 28. (★★★)** En s'inspirant de l'exercice précédent, simplifier et tracer la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \text{Arccos}(4x^3 - 3x)$ .

**Exercice 29 – Coordonnées cartésiennes et polaires. (★)** Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $M$  un point du plan qui n'est pas  $O$ . Notons  $(x, y)$  ses coordonnées cartésiennes et  $(r, \theta)$  ses coordonnées polaires (c'est-à-dire que l'angle orienté  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$  a pour mesure  $\theta \in [0; 2\pi[$  et que la longueur  $OM$  vaut  $r$ ).

1) Montrer que  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ .

2) Montrer que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta \equiv \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$ .