Feuille d'exercices n° 35

Variables aléatoires finies

I Variables aléatoires avec modélisation

Exercice 1. (★) On joue au jeu suivant : on lance deux dés équilibrés à 6 faces. Si aucune des faces ne vaut 6, alors on gagne le produit des deux chiffres obtenus en euros. Si une au moins des faces vaut 6, alors on ne gagne rien. Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise ce jeu et définir une variable aléatoire X qui donne le gain de ce jeu. Donner la loi de X sous la forme d'un tableau. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 5), \qquad \mathbb{P}(21 \leqslant X < 25), \qquad \mathbb{P}(X > 18) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \in \{10; 12; 14\}).$$

Exercice 2. (★) Un chercheur de l'université Paris-Sud se rend deux à trois fois par semaine à Paris (20 trajets sur le mois) avec le RER B. D'après des statistiques, un train sur trois accuse un retard. Quelle est la probabilité que ce francilien arrive en retard au plus cinq fois en un mois ?

Exercice 3. (★) Quelqu'un monte un escalier mais à chaque pas, il décide de monter deux marches d'un coup avec probabilité p (les autres fois avec probabilité $1 - p$ donc). On considère les différents pas comme étant indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- X_n le nombre de marches déjà franchies à l'issue du $n^{\text{ième}}$ pas.
- Y_n le nombre de fois où il a monté deux marches d'un coup lors des n premiers pas.

1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 4. (★) Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in]0\,;1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?

Exercice 5. (★) Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1) Donner la loi de X et calculer son espérance.
2) Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.

Exercice 6. (★) Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, tandis que sur la deuxième roue il y a 1 vert et 9 blancs. Les gains sont distribués de la façon suivante :

- 3 euros si les deux roues tombent sur les secteurs rouge et vert.
- 1 euro si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc.
- 50 centimes si les deux roues tombent sur un secteur blanc.

Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain s'il veut avoir un bénéfice moyen d'au moins 25 centimes par partie. Donner alors la loi du bénéfice.

Exercice 7. (★) Le gérant d'un magasin de téléphones intelligents a un très grand stock de téléphones que l'on peut considérer comme constant. La probabilité qu'un téléphone soit abîmé vaut $\dfrac{49}{1000}$. Un client achète n téléphones. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté au plus un téléphone défectueux ?

Exercice 8. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois de suite un dé bien équilibré à 6 faces. On note X_n le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de X_n et calculer son espérance.

Exercice 9 – Loi des tirages avec ou sans remise. (★★) Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \dfrac{r}{N}$.

1) On tire successivement avec remise n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   On dit que la loi binomiale est la loi des tirages avec remise.
2) Désormais on tire successivement sans remise n boules dans l'urne et on note X_N le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et déterminer $X_N(\Omega)$.
   b) Montrer que, pour tout $k \in X_N(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_N = k) = \dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k}\Big/\dbinom{N}{n}$.

   On dit que X_N suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On la note $\mathcal{H}(N, n, p)$. On dit aussi que la loi hypergéométrique est la loi des tirages sans remise.
   c) Retrouver la formule de Vandermonde : si a, b, n sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant n \leqslant a+b$, alors
   $$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$
   d) (★★★) En utilisant la formule de Vandermonde, montrer que $\mathbb{E}(X_N) = np$.

Exercice 10. (★★) Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1) On tire successivement et sans remise k boules de l'urne et on note X le plus grand des numéros tirés. Donner un espace probabilitébilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et définir proprement la variable aléatoire X comme fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Déterminer la loi de X.
2) Même question avec des tirages successifs avec remise de k boules.
3) a) Même question avec un tirage simultané de k boules.
   b) Retrouver la formule de Pascal généralisée : $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Exercice 11. (★★) Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir à l'aide d'un trousseau de dix clés dont une seule convient. Deux méthodes s'offrent à lui :

- Méthode A (lorsqu'il est sobre) : il essaie les clés l'une après l'autre.
- Méthode B (lorsqu'il est ivre) : il essaie une clé, agite le trousseau, puis recommence au plus dix fois. S'il n'a pas ouvert la porte, alors il retourne se coucher.

On note X_A (resp. X_B) le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte avec la méthode A (resp. la méthode B). On pose $X_B = 11$ s'il n'arrive pas à ouvrir la porte après dix essais.

1) Déterminer la loi de X_A et calculer $\mathbb{P}(X_A > 8)$ et $\mathbb{E}(X_A)$.
2) Déterminer la loi de X_B et calculer $\mathbb{P}(X_B > 8)$.
3) Un cambrioleur caché à l'intérieur sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Le gardien a déjà échoué huit fois à ouvrir la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 12. (★★) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on note Y_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule dont le numéro est supérieur ou égal à celui du précédent.

1) Justifier qu'on peut se limiter à $n+1$ tirages et construire un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience. Justifier que $Y_n(\Omega) = [\![2\,;n+1]\!]$.
2) Déterminer alors $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.
3) En déduire que
$$\forall k \in [\![2\,;n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$
4) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice 13. (★★) Soit $n \geqslant 2$. On lance n fois un dé équilibré et on lance une pièce équilibrée autant de fois qu'on a obtenu 6 avec le dé. Donner la loi du nombre de Face obtenus.

Exercice 14 – Urnes de Pòlya. (★★) Soient r_0, b_0 et d des entiers strictement positifs. Une urne contient b_0 boules bleues et r_0 boules rouges. Une boule est choisie au hasard uniformément dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant un nombre d de boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la procédure aussi souvent que nécessaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 (resp. 0) si la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge (resp. bleue).

1) Donner les lois de X_1 et de X_2. Que remarque-t-on ? Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages.
   a) Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)$.
   b) En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \dfrac{r_0 + d\,\mathbb{E}(S_n)}{r_0+b_0+d\,n}$.
3) En déduire que la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Commenter ce résultat.

Exercice 15. (★★) Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher telles que, pour tout $i \in [\![0\,;p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1) Déterminer la loi de N_p.
2) Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$,
$$\mathbb{P}(N_p=k) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \binom{n}{k} I_{n,k} \qquad \text{où} \qquad I_{n,k} = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx.$$
3) Calculer la valeur de cette limite.
   On pourra commencer par chercher une relation de récurrence entre $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$.

Exercice 16. (★★★) Soit $n \geqslant 1$. On lance $6n$ dés équilibrés. Quelle est la probabilité que chaque numéro de $[\![1\,;6]\!]$ apparaisse n fois ? Donner un équivalent de cette probabilité (lorsque n tend vers $+\infty$).

II Variables aléatoires sans modélisation

Exercice 17. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k).$$

Exercice 18. (★) Soit X une variable aléatoire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] \geqslant \mathbb{V}(X)$.

Exercice 19 – Inégalité de Jensen. (★) Soit X une variable aléatoire réelle et soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X))$.

Exercice 20. (★) Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0\,;1[$. Déterminer de deux façons différentes la loi de $Y = n - X$.

Exercice 21. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1\,;6n]\!]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \cos\left(\frac{\pi X}{3}\right)$.

Exercice 22 – Variance d'une loi uniforme. (★) Soient a et b des entiers tels que $a < b$. Calculer la variance d'une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[\![a\,;b]\!]$.

Exercice 23. (★★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$ telle que
$$\forall k \in [\![0\,;n]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{c}{k+1}\binom{n}{k}.$$
Déterminer c puis calculer $\mathbb{E}(X+1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X+1))$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 24. (★★) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0\,;1[$. Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $Y = \dfrac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Montrer que $Z = z^X$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 25 – Convergence binomiale/Poisson. (★) Soient $\lambda > 0$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0\,;1[$ telle que $p_n \sim \lambda/n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p_n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Ce résultat pourra servir d'introduction à la loi de Poisson en seconde année.

Exercice 26 – Fonctions génératrices. (★★) Pour toute variable aléatoire X sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction $G_X : t \longmapsto \mathbb{E}\left(t^X\right)$ est appelée fonction génératrice de X.

1) Soit X une variable aléatoire sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que G_X est une fonction polynomiale et exprimer ses coefficients à l'aide des probabilités $\mathbb{P}(X=k)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
2) À l'aide de la question précédente, expliciter G_X dans les cas où X suit une loi certaine (réelle), une loi uniforme sur $[\![0\,;n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), une loi de Bernoulli puis une loi binomiale.
3) Soit X une variable aléatoire sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que
$$G_X(1) = 1, \qquad \mathbb{E}(X) = G_X'(1) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = G_X''(1) + {G_X}'(1) - (G_X'(1))^2$$
4) Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si elles ont la même fonction génératrice.
   b) Que dire de G_{X+Y} quand X et Y sont indépendantes.

III Couples de variables aléatoires

Exercice 27. (★) Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ (définies sur Ω) sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 28. (★) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 29. (★) Soient X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner une CNS pour que X et $f(X)$ soient indépendantes.

Exercice 30. (★) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre respectif p et q. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X,Y)$.

Exercice 31. (★) On se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées, de loi $U([\![1\,;n]\!])$. On définit $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant la formule de l'exercice 17.

Exercice 32. (★) Soient X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$ et telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \qquad \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \lambda ij.$$

1) Que vaut nécessairement la constante λ ?
2) Donner la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. Même question pour la variable Y.
3) X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.
5) Calculer la loi de $U = \max(X,Y)$.

Exercice 33. (★) Soient n_1 et n_2 deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On se donne X_1 une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n_1 et p, et X_2 une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n_2 et p. On suppose enfin que X_1 et X_2 sont indépendantes. On rappelle (cf. cours) que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1+n_2, p)$. Soit $n \in [\![0\,;n_1+n_2]\!]$. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant que l'événement $[X_1+X_2 = n]$ est réalisé.

Exercice 34. ($\bigstar$) Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi du couple (U, V) puis la covariance de U et V. Est-ce que U et V sont indépendantes.

Exercice 35. ($\bigstar\bigstar$) On tire successivement et sans remise toutes les boules d'une urne contenant $n-2$ boules rouges et 2 boules bleues (avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$). On note X le rang d'apparition de la première boule bleue et Y le rang d'apparition de la seconde.

1) Préciser la loi marginale de X, la loi du couple (X, Y) et en déduire la loi marginale de Y.
2) Soit $k \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $[Y = k]$ est réalisé.
3) Soit $k \geqslant 1$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y - k$ sachant que $[X = k]$ est réalisé. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 36. ($\bigstar\bigstar$) On considère X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et suivant toutes une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. On note Y_1, Y_2, Y_3 les valeurs de X_1, X_2, X_3 réordonnées dans l'ordre croissant. En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ et $Y_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$.

1) Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, trouver $\mathbb{P}(Y_3 \leqslant k)$. En déduire la loi de Y_3.
2) Déterminer la loi de Y_1.
3) On note Z_k la variable aléatoire égale au nombre d'indices $i \in [\![1\,;3]\!]$ tels que $X_i \leqslant k$.
    a) Quelle est la loi de Z_k ?
    b) Comparer $[Z_k \geqslant 2]$ et $[Y_2 \leqslant k]$. En déduire $\mathbb{P}(Y_2 \leqslant k)$.

Exercice 37. ($\bigstar\bigstar$) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On considère $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$. On pose enfin $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, donner la loi de Y_i. En déduire l'espérance de Y et la variance de Y.

Exercice 38. ($\bigstar\bigstar$) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $p \in]0\,;1[$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué qui affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$ mais qui affiche un nombre au hasard (uniformément) entre entre 1 et $n-1$ lorsque X prend la valeur 0 ou n. On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le compteur.

1) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Quelle est la probabilité que le compteur Y affiche la valeur prise par X ?
3) On suppose que $n$pair. Sachant que le compteur affiche la valeur $\dfrac{n}{2}$, quelle est la probabilité que $X = \dfrac{n}{2}$?

Exercice 39 – Loi triangulaire. ($\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![0\,;n]\!]$. On note $Z = X + Y$. On dit que Z suit la loi triangulaire sur $[\![0\,;2n]\!]$.

1) Obtenir $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ sans faire de calculs.
2) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
3) Représenter graphiquement la loi de Z lorsque $n = 5$. Pourquoi parle-t-on de loi triangulaire ?
4) Retrouver $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$ par le calcul.
   Exceptionnellement, on utilisera définition de la variance et non pas la formule de Koenig-Huygens pour calculer $\mathbb{V}(Z)$ (ce sera moins technique).

Exercice 40. ($\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement sans remise. On note Y le maximum des numéros parmi les deux boules tirées.

1) a) Déterminer la loi de Y.
    b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
2) On note U le numéro de la première boule tirée et V le numéro de la seconde.
    a) Déterminer la loi conjointe de (U, V).
    b) Retrouver $\mathbb{E}(Y)$ avec la formule de transfert.

Exercice 41. (★★) Soit $n \geqslant 1$. Deux joueurs jouent indépendamment l'un de l'autre n parties de pile ou face. À l'aide de la formule de Vandermonde (cf. chapitre 33), calculer la probabilité qu'ils obtiennent chacun le même nombre de face ? En déduire un équivalent de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 42 – Espérance conditionnelle. (★★★) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Pour tout événement non négligeable (c'est-à-dire de probabilité non nulle) $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant que A est réalisé :

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x|A),$$

On rappelle que, pour tout événement B, $\mathbb{P}(B|A)$ est une autre écriture pour $\mathbb{P}_A(B)$.

1) Montrer que l'espérance sachant que A est réalisé est linéaire.
2) Calculer $\mathbb{E}(X|A)$ dans le cas où les variables aléatoires X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes.
3) Soit $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements non négligeables. Montrer la formule des espérances totales :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(X|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

4) Application : on fixe $q \in \mathbb{N}^*$. On se donne $X_1, X_2, \dots, X_q$ des variables aléatoires suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1\,;q]\!]$. On suppose que toutes ces variables sont indépendantes. Calculer l'espérance de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.

IV Inégalités de concentration

Exercice 43. (★) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On suppose qu'il existe $p \in [1\,;+\infty[$ tel que $\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 44. (★) Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \qquad \mathbb{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Exercice 45. (★★) Soit X une variable aléatoire. On suppose que X est à valeurs dans $[-b\,;b]$ avec $b > 0$. Montrer que pour tout $a \in]0\,;b[$,

$$\frac{\mathbb{E}\left(X^2\right) - a^2}{b^2 - a^2} \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{a^2}.$$

Exercice 46. (★★) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a\,;b]$.

1) Simplifier la quantité $\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}((b - X)(X - a))$. En déduire l'inégalité de Bathia-Davis :

$$\mathbb{V}(X) \leqslant (b - \mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - a)$$

2) En déduire l'inégalité de Popoviciu : $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
3) Soit $X \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Calculer $\mathbb{V}((b - a)X + a)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 47. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(4n, \frac{1}{2})$.

1) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(|X_n - 2n| \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(|X_n - 2n| \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
3) Donner un équivalent simple de $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.